

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, А. Л. Афендииков, Ф. И. Атауллаханов, Н. К. Балабаев, В. Н. Бикташев, И. В. Бикташева, Р. М. Борисюк, Н. Д. Введенская, Р. Д. Дагкесаманский, Ю. Г. Зархин, Ю. С. Ильяшенко, В. Д. Лахно, В. Ю. Лунин, Н. Л. Лунина, Е. В. Николаев, В. С. Посвянский, М. А. Ройтберг, В. С. Рябенький, Л. Б. Ряшко, Я. Г. Синай, В. М. Тихомиров, А. А. Токарев, А. Г. Уржумцев, А. И. Хибник, Памяти Эммануила Эльевича Шноля, *УМН*, 2017, том 72, выпуск 1(433), 197–208

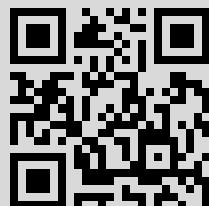
DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/rm9751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 192.168.20.28

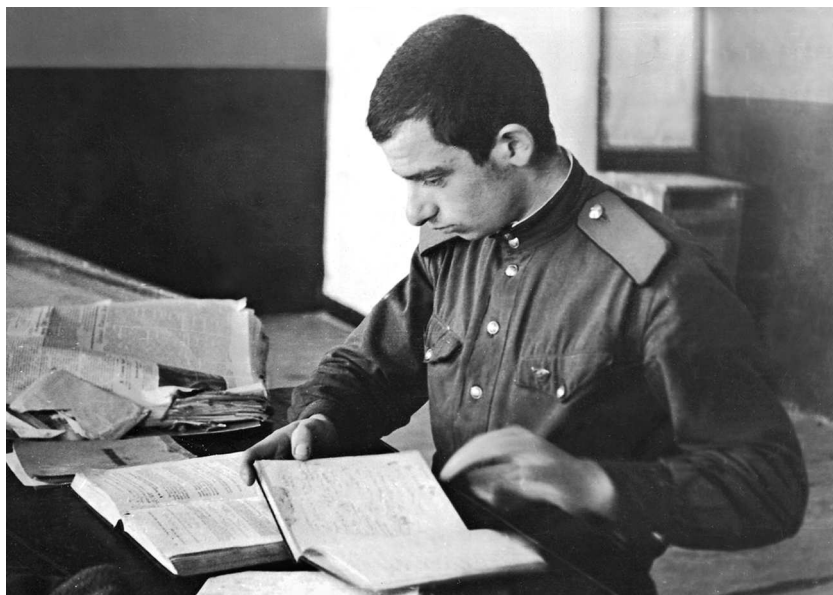
21 февраля 2017 г., 14:22:42



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Памяти Эммануила Эльевича Шноля

Эта статья посвящена жизни и делам Эммануила Эльевича Шноля, доктора физико-математических наук, профессора. Эммануил Эльевич был ярко и разносторонне одаренным человеком, оставившим глубокий след в душах тех, кому посчастливилось с ним общаться. Замечательный математик – теоретик и прикладник – Э.Э. Шноль ни в коей мере не принадлежал к числу “узких специалистов”. Его интересы не ограничивались какими-либо разделами математики или даже всей математикой – по своей природе он был естествоиспытателем в широком смысле этого слова.



Э.Э. Шноль родился 26 августа 1928 г. Его отец Эли Гершевич Шноль был энциклопедически образованным человеком, знатоком языков, религиозным философом, чья педагогическая и просветительская деятельность была прервана в 1933 г. лагерем – он вышел оттуда безнадежно больным и скончался в 1940 г. Мать Фаина Яковлевна Юдович, психолог, педагог-словесник, воспитала троих сыновей. Все они стали известными учеными, докторами наук, выбрав различные области естествознания: Эммануил – математику, Симон – биологию, Яков – геологию. Память об отце и его наставления (“письмо старшему сыну”) сыграли большую роль в жизни сыновей.

Врожденный математический талант Э. Э. Шноля проявляется с ранних лет. В годы войны, в эвакуации, он досрочно оканчивает среднюю школу и в 1943 г. в возрасте 15 лет поступает на механико-математический факультет МГУ. В студенческие годы он участвует в работе семинаров И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, занимаясь нормированными кольцами (см. более поздние публикации [1] и [2]) и размышляя над 5-й проблемой Гильберта.

В 1948 г. И. М. Гельфанд приглашает своих учеников Э. Э. Шноля и А. М. Молчанова поступить к нему в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова, в группу вычислителей, на основе которой в дальнейшем был создан Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Эммануил Эльевич успешно сдает вступительные экзамены в аспирантуру, однако анкетные данные становятся преградой, и в течение последующих четырех лет он проходит службу в армии. В суровых армейских условиях первых послевоенных лет он находит силы на продолжение занятий математикой, в значительной степени благодаря поддержке его ближайшего друга А. М. Молчанова, который присылал ему книги по математике. Здесь он выполняет свою лучшую, по его собственной оценке, математическую работу, посвященную теории спектров операторов Шрёдингера и ставшую основой его кандидатской диссертации. По окончании армейской службы Э. Э. Шноль три года работает учителем математики в одной из московских школ; контакты со своими выпускниками он поддерживал до последних дней жизни.

Параллельно с работой в школе Эммануил Эльевич прилагает максимальные усилия для того, чтобы вернуться в академическую науку. Он публикует свою вторую, ставшую классической, работу по уравнению Шрёдингера [4] и продолжает участвовать в семинаре И. М. Гельфанда, где ему поручают разобрать и рассказать только что опубликованное решение 5-й проблемы Гильберта. Он подготавливает и в 1955 г. защищает в МГУ кандидатскую диссертацию «О поведении собственных функций уравнения Шрёдингера»¹, ². В 1956 г. по ходатайству К. И. Бабенко, поддержанному директором ИПМ М. В. Келдышем, Э. Э. Шноль был принят на работу в это учреждение, с которым он будет связан более 20 лет.

В ИПМ Э. Э. Шноль вливается в коллектив ученых, закладывавших основы бурно развивающейся научной дисциплины – современной вычислительной математики, востребованной прикладными вопросами в ядерных и космических исследованиях. Нужны были математики высокого уровня, и Э. Э. Шноль занял в этом коллективе достойное место. Научная деятельность Э. Э. Шноля в ИПМ была посвящена нескольким направлениям. Прежде всего, это работы в основном русле институтской тематики – создание численных методов решения двумерных газодинамических задач. Сочетание чисто математического взгляда на проблему с интуицией вычислителя позволило ему создать методы, опережавшие тогда запросы практики. Например, при решении одной задачи теории упругости (см. [7]) он вывел метод конечных элементов (к сожалению, метод не был опубликован, а остался в закрытом отчете; строгое математическое обоснование МКЭ началось в ранние шестидесятые годы, первые публикации появились в 1963 г.). Эммануил Эльевич активно участвовал в бурной математической деятельности института, и ряд его идей впоследствии был претворен в жизнь коллегами. Одним из примеров этого является важное понятие спектра семейства разностных операторов, родившееся из замечания Э. Э. Шноля о роли почти собственных функций и позволившее обосновать критерий устойчивости Бабенко–Гельфанда³.

¹ В воспоминаниях Э. Э. о И. Г. Петровском [54] отмечена ключевая роль Ивана Георгиевича в том, что диссертация была принята к защите на мехмате МГУ.

² Интересное свидетельство о процессе защиты Э. Э. оставил его школьный ученик Арнольд Литвинов, рассказав, что Э. Э. пригласил на защиту диссертации свой школьный класс и построил доклад таким образом, чтобы суть проблемы и основные результаты были понятны его ученикам.

Помимо И. М. Гельфанда и К. И. Бабенко, которых Эммануил Эльевич считал своими главными учителями в “чистой” и прикладной математике, на становление Э. Э. Шноля как математика и естествоиспытателя значительное влияние оказали его контакты с А. С. Кронродом, Г. Е. Шиловым, Я. Б. Зельдовичем, Д. А. Франк-Каменецким и многими другими выдающимися учеными.

В начале 1970-х годов Э. Э. Шноль вступает в новый этап своей жизни, когда в полной мере раскрывается другая сторона его таланта – огромный созидательный и педагогический потенциал. В эти годы в Научном центре биологических исследований РАН в Пущино усилиями А. М. Молчанова и Э. Э. Шноля, при поддержке М. В. Келдыша, С. Э. Шноля и Г. М. Франка, организуется новый институт – Научно-исследовательский вычислительный центр, НИВЦ (позднее переименованный в Институт математических проблем биологии, ИМПБ РАН). Совместно с А. М. Молчановым, назначенным директором, Э. Э. Шноль приступает к созданию этого института, основная часть научного персонала которого набирается из молодых выпускников университетов. Побудительными причинами организации НИВЦ являлись, с одной стороны, активное проникновение математических подходов в ряд разделов биологии, а с другой – растущие потребности этих разделов в высокопроизводительной (по меркам того времени) вычислительной технике. В “зону ответственности” Э. Э. Шноля попадает как определение научной тематики института и профессиональный рост пришедшей в институт молодежи, так и курирование работы вычислительной техники.

Научная тематика института в значительной мере определялась взаимодействием с пущинскими биологическими лабораториями. Существенную роль в организации такого взаимодействия играли контакты Э. Э. Шноля с ведущими пущинскими учеными (Е. Е. Сельковым, В. И. Кринским, Ф. И. Атауллахановым, О. Б. Птицыным и другими) и организация постоянно действующих тематических научных семинаров, на которых вырабатывалось общее понимание естественнонаучной проблемы и определялась возможная роль сотрудников ИМПБ в ее решении. Важнейшую роль в выработке такого понимания играли широчайшая математическая эрудиция Э. Э. Шноля и его умение выделять математическую основу в разнообразных естественнонаучных проблемах.

С самого начала пущинского периода делом особой важности для Эммануила Эльевича стало обучение молодого научного коллектива ИМПБ и налаживание его связей с “внешним миром”. Это включало и постоянную заботу о создании и пополнении научной библиотеки института, и создание математического семинара и руководство им, и – наиболее специальное – организация и проведение годовых научных конференций НИВЦ/ИМПБ (1973–1988 гг.). Эти конференции, душой которых был Эммануил Эльевич, ежегодно собирали в стимулирующей пущинской атмосфере ученых из многих научных учреждений всей страны, обеспечивая возможность регулярного диалога между представителями различных научных дисциплин. Традиции конференций были продолжены ежегодными Пущинскими совещаниями-семинарами по дифференциальным уравнениям (1986–1990 гг.), где наряду с теоретическими вопросами обсуждались численные методы, а также практические приложения теории динамических систем. Влияние личности Э. Э. Шноля на стиль проведения Пущинских форумов, его эрудированность в самых различных вопросах математики и естествознания во многом определили их пользу и успех.

Особую роль в научной жизни института играла возглавляемая Э. Э. Шнолем Лаборатория вычислительной математики. Эта лаборатория имела широчайшую тематику: от математических исследований по теории устойчивости, бифуркациям динамических систем, алгебраической геометрии до разработки компиляторов и создания

³См.: С. К. Годунов, В. С. Рябенский, *Введение в теорию разностных схем*, Физматлит, М., 1962, 340 с.

библиографических систем; от задач молекулярной динамики белков и биологической кристаллографии до исследования биохимических колебаний, распространения волн в активных средах и работ по проблемам свертываемости крови. Это был своеобразный “инкубатор”, из которого по мере созревания отпочковывались самостоятельные лаборатории и группы. Отличительной особенностью руководства Э. Э. Шноля было глубокое вникание в проблему, сочетаемое с полным доверием молодым коллегам, научной свободой и поддержкой инициативы. Он обладал стилем по-настоящему сильного руководителя: тратить большие силы на административную поддержку проекта, в то же время не вмешиваясь в его исполнение.

Несколько тем, мотивированных математическими задачами естествознания (классическая и квантовая механика, астрофизика, биология), прослеживаются в течение всей научной карьеры Э. Э. Шноля. Сюда относятся: спектральная теория операторов, теория устойчивости и симметрии дифференциальных уравнений, теория бифуркаций, экстремальные задачи. О некоторых из этих тем коротко сказано ниже. В число своих основных математических работ Эммануил Эльевич включал [5], [16], [24], [35], [47].

Проходя службу в армии и читая при всякой возможности “Методы математической физики” Куранта и Гильберта, Э. Э. Шноль заинтересовался вопросом: как соотносятся математическое и физическое определения спектра оператора Шрёдингера? Ответом явилась “теорема Шноля”: почти все точки спектра оператора Шрёдингера L (т. е. почти все значения λ , при которых оператор $L - \lambda I$ не имеет непрерывного обратного) являются собственными значениями, причем соответствующие собственные функции растут на бесконечности не быстрее степенной функции [4]. По словам И. М. Гельфанда, это было самое важное продвижение в теории операторов Шрёдингера после знаменитой работы Германа Вейля 1910 г. Теорема Шноля, неоднократно улучшенная самим автором [5], [6], послужила толчком для многих работ. Кажется непостижимым, как мог Эммануил Эльевич сочетать службу в армии с первоклассным математическим исследованием!

Основные научные интересы Э. Э. Шноля в течение многих лет были связаны с теорией устойчивости. Первая его статья на эту тему была опубликована в 1969 г., а весь цикл насчитывает порядка тридцати работ, многие из которых выполнены совместно с его учеником Л. Г. Хазиным (см., например, монографии [30], [35]). Исследуя различные критические случаи, Э. Э. Шноль обнаружил, что наличие резонанса может приводить к стабилизации положения равновесия, которое в отсутствие резонанса является неустойчивым. Одним из центральных результатов этого цикла является полное решение задачи об устойчивости положения равновесия для вырождений вплоть до коразмерности 3. Критерии устойчивости для вырождений коразмерностей 1 и 2 были получены А. М. Ляпуновым, Г. В. Каменковым и другими. Для коразмерности 3 большинство критериев получены Э. Э. Шнолем и Л. Г. Хазиным. В частности, для одного из критических случаев (две пары чисто мнимых собственных значений в резонансе 1 : 3) ими было доказано [23] несуществование алгебраического критерия устойчивости и тем самым была найдена минимальная коразмерность вырождения, при которой проявляется алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости, открытая В. И. Арнольдом в коразмерности, большей 100. Следует подчеркнуть, что все вырождения исследованы Э. Э. Шнолем вместе с окрестностями, а размеры “опасных” и “безопасных” отклонений от положения равновесия оценены как в фазовом пространстве, так и в пространстве параметров. Весь этот большой цикл составил содержание его докторской диссертации “Исследования по устойчивости стационарных движений”, защищенной в 1984 г.

Интерес Э. Э. Шноля к задачам классической механики не ограничивался теорией устойчивости, его занимали и вопросы о симметриях динамических систем, в связи со знаменитой теоремой Эмми Нётер о первых интегралах. В частности, Э. Э. Шноль

изучал (в вещественно-аналитической ситуации) компактные и полупростые группы Ли симметрий гамильтоновых систем с n степенями свободы и показал, что ранг таких групп не превосходит n . В качестве следствия (перейдя к кокасательному расслоению) он показал, что полупростая вещественная группа Ли, вещественно аналитически (и эффективно) действующая на n -мерном многообразии, имеет ранг не более n (см. [16]). (Другое, более прямое доказательство было позднее, в 1991 г., дано Ю. Г. Зархиным.)

В 1980-е годы совместно с сотрудниками лаборатории Е. Е. Селькова в Институте биологической физики РАН в Пущино Э. Э. Шноль занимался проблемой синхронизации биохимических осцилляторов [31]. Эти исследования породили его интерес к вопросу о бифуркациях автоколебаний (предельных циклов) в системах с симметрией. Совместно со своим учеником Е. В. Николаевым, Эммануил Эльевич рассмотрел общую задачу о бифуркациях предельных циклов в типичных однопараметрических семействах систем, обладающих произвольной дискретной группой симметрий [44]. Предельные циклы в таких системах были классифицированы в соответствии с тем, как взаимодействуют естественная непрерывная группа сдвигов вдоль периодической орбиты и дискретная группа симметрий системы, было также дано полное описание однопараметрических бифуркаций для двух классов из трех. В работе [45] изучались положения равновесия в уравнениях, имеющих некоторую группу симметрий, и были описаны полные бифуркационные картины для нескольких простейших бифуркаций. В частности, была показана возможность рождения трехмерной сферы из положения равновесия.

В совместной работе с Л. Б. Ряшко [48] получено далеко идущее обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. В этой работе вместо положения равновесия рассматривается компактное инвариантное многообразие, а вместо первого приближения – линеаризация “трансверсальной компоненты” дифференциального уравнения. Это символично: последняя математическая работа Эммануила Эльевича поставила точку в развитии некоторой ветви теории устойчивости. Позднее Л. Б. Ряшко обобщил полученный критерий устойчивости на стохастические дифференциальные уравнения.

Параллельно с чистой математикой Э. Э. Шноль всю жизнь занимался прикладными задачами. В 1960-е годы он активно сотрудничал с группой астрофизиков в ИПМ, возглавляемой Я. Б. Зельдовичем. Тематика этой группы затрагивала самые разнообразные проблемы – от моделирования процессов, приводящих к вспышке сверхновых звезд, до важнейших задач космологии. Эти контакты продолжались на протяжении полутора десятков лет и были весьма плодотворными. Первая статья Э. Э. Шноля из “астрофизического” цикла посвящена математическому анализу проблемы устойчивости газового шара в собственном гравитационном поле [12]. Близкой проблеме, а именно гравитационной устойчивости пылевого облака, посвящена статья Э. Э. Шноля, написанная в соавторстве с Л. Г. Хазиным [11]. Следующая его статья [21] была написана в соавторстве с двумя астрофизиками (Г. С. Бисноватым-Коганом и С. И. Блинниковым), в ней рассматривается проблема устойчивости звезды, находящейся в одном из необычных состояний вблизи фазового перехода, например в состоянии предсверхновой. В этой работе явно ощущается “почерк” Эммануила Эльевича – строгая математическая формулировка поставленной задачи и столь же строгие выводы. Результаты Э. Э. Шноля продолжают использоваться астрофизиками при анализе физического состояния звезд, находящихся в том или ином критическом состоянии.

Еще один пример плодотворного сотрудничества Э. Э. Шноля с физиками относится к изучению с В. Д. Лахно и А. Н. Коршуновой критических состояний электрона в молекулярном кластере при воздействии сильного магнитного поля [46]. Модель описывается одномерным нелинейным уравнением Шрёдингера. Найден минималь-

ный размер кластера, для которого существует локализованное решение. Показано, что при увеличении радиуса кластера возможно сосуществование двух, трех и более решений, соответствующих локализованным состояниям электрона с различными энергиями.

Э. Э. Шноль много сотрудничал с Институтом химической физики РАН. При его активном участии была решена задача о распространении холодного пламени [22]. Отметим, что задача об определении скорости ламинарного пламени давно стала классической задачей математической физики и она сводится к поиску траектории в фазовом пространстве, соединяющей две особые точки. В случае одного дифференциального уравнения эта задача была решена в работах А. Н. Колмогорова, Я. Б. Зельдовича и др. Для систем уравнений это сложная вычислительная задача, требующая исследования особых точек, точек бифуркации.

Весной 1966 г. в ИПМ на семинаре, посвященном математическим вопросам естествознания, Э. Э. Шноль озвучил следующую мысль: “Теории жидкостей несовершенны и не всегда согласуются друг с другом. А нельзя ли ‘посмотреть’ на структуру жидкости, рассчитав взаимодействие и движение ее молекул с помощью вычислительной машины?” Так начался один из первых в СССР проектов по компьютерному моделированию молекулярной динамики, в котором Э. Э. Шноль участвовал совместно с А. Г. Гривцовым и Н. К. Балабаевым. Первые результаты нашли отражение в серии препринтов ИПМ под общим заголовком “Численные эксперименты по моделированию движения молекул” (см. [15]). Сейчас молекулярная динамика является одним из главных инструментов в молекулярных исследованиях. Следует отметить, что разработанные тогда идеи и методы сохранили свое значение до настоящего времени. Наиболее известной работой Э. Э. Шноля в этом проекте является [20], в которой изучалось движение свободной полимерной цепочки и был обнаружен неожиданный эффект повышенной подвижности концевых атомов (“эффект горячих концов”).

В 1980-е годы пушинские коллеги-биофизики из лаборатории В. И. Кринского вовлекли Э. Э. Шноля в изучение нелинейных волн в активных средах (автоволн). Компьютерные расчеты позволили обнаружить новые неожиданные свойства дифракции плоских волн, например прохождение через отверстие каждой второй автоволны [33]. Работа [32] посвящена изучению вихрей – решений, у которых волновой фронт вращается по спирали (“спиральные волны”). Изучалось поведение двух взаимодействующих вихрей, и было показано, что, в зависимости от параметров модели и направления вращения, вихри могут либо двигаться вдоль общей оси симметрии, либо сложным образом вращаться вокруг общего центра симметрии.

Уникальная способность Эммануила Эльевича видеть и понимать проблему одинаково четко и на языке естествознания, и на языке математики была решающей для дальнейшего успеха этого направления. Так, он предположил, что в теории спиральных волн нужно воспользоваться классическим принципом: уравнения взаимодействия частицы с полем и уравнения эволюции самого поля должны быть выводимы из одного и того же более фундаментального уравнения. Ученики Эммануила Эльевича, И. В. и В. Н. Бикташевы, обосновали асимптотическую теорию эволюции спиральных волн как локализованных “частиц”, которая количественно предсказывает скорость дрейфа спиральных волн и ряд новых явлений, например орбиты прецессии вокруг локальных неоднородностей⁴. Понимание эволюции вихрей в упрощенных моделях помогает интерпретировать результаты численных экспериментов в реалистичных моделях сердечных аритмий и фибрилляции.

Более поздние работы Э. Э. Шноля совместно с группой Ф. И. Атауллаханова в Гематологическом научном центре РАМН относятся к исследованию автоволн в процессе движения и свертывания крови. Математическая модель процесса “реакция-диф-

⁴См.: V. N. Biktashev, D. Barkley, I. V. Biktasheva, “Orbital motion of spiral waves in excitable media”, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:5 (2010), 058302, 4 pp.

фузия-конвекция” включала десятки уравнений, но в окончательном виде она свелась к трем нелинейным уравнениям в частных производных. В этой модели конвекция (кровоток) приводила к парадоксальным эффектам. Например, в неподвижной среде волна возбуждения гаснет, а в неравномерно движущейся распространяется без затухания. Другой пример: волна распространяется на определенное расстояние, а затем превращается в неподвижную структуру. Исследование зависимости характера поведения этой модели от параметров обнаружило сложнейшую картину бифуркаций пространственно-временных режимов [49], [51]. По словам Ф. И. Атауллаханова, “мы учились у Э. Э. тому, как исследовать динамику и бифуркации в сложных системах, а он педантично и детально учился у нас биологии и физике свертывания. Это было очень необычно и здорово”. Из этих исследований родился новый метод диагностики и прибор для обнаружения нарушений свертываемости крови. И только очень немногие знают, как велик вклад в эти прикладные результаты блестящего математика – Э. Э. Шноля.

Развитие этого направления исследований привело к разработке новой детальной модели течения крови в сосуде, учитывающей наличие эритроцитов и тромбоцитов в составе крови, их размер, форму и другие характеристики, измеряемые экспериментально. Э. Э. Шноль активно участвовал в проекте, глубоко вникая в биологические детали, он формулировал вопросы для моделирования и обсуждал методы численного исследования. Модель позволила количественно объяснить механизм локализации тромбоцитов на периферии сосуда вследствие присутствия в крови эритроцитов [56] и механизм адгезии тромбоцитов к сосудистой стенке и растущему тромбоцитарному тромбу⁵. Последующая работа [57] описывает рост тромба в сосуде и динамику потока крови, огибающего тромб. В результате этих исследований удалось понять, как природа решает задачу локализации тромба в пространстве, и объяснить механизм агрегации тромбоцитов в потоке крови.

Другие работы Э. Э. Шноля с группой Ф. И. Атауллаханова [50]⁶ связаны с исследованием деполимеризации биологических микротрубочек – белковых внутриклеточных структур, играющих важную роль в жизни и делении клеток. В этих работах изучалась модель динамики полимеризации (сборки) и деполимеризации (разборки) на разных концах микротрубочки. Было теоретически предсказано, что в процессе деполимеризации микротрубочка может развивать значительные силы и, тем самым, является совершенно уникальным и новым биологическим “двигателем”.

В серии работ, выполненных совместно с А. С. Кондрашовым, Э. Э. Шноль доказал три теоремы по теории естественного отбора [37], [38], [55]. Эти результаты, известные как “теоремы дядюшки Шноля”⁷, включаются как фундаментальные факты в курс эволюционной биологии. В 1970-е годы Э. Э. Шноль возглавил один из первых в мире проектов по разработке численных методов, алгоритмов и программ для изучения бифуркаций динамических систем [28]⁸. Необходимость в таких программах, рассчитанных на широкого пользователя, диктовалась потребностями математического моделирования, в частности, в еще только начинавшихся исследованиях колебательных и хаотических режимов в биологии. Новые теоретические результаты с энтузиазмом обсуждались молодыми сотрудниками ИМПБ на руководимом Э. Э. Шнолем семинаре, где были отобраны бифуркационные сценарии, типичные для прикладных задач.

⁵См.: А. А. Tokarev, A. A. Butylin, F. I. Ataullakhanov, “Platelet adhesion from shear blood flow is controlled by near-wall rebounding collisions with erythrocytes”, *Biophys. J.*, **100**:4 (2011), 799–808.

⁶См.: E. L. Grishchuk, M. I. Molodtsov, F. I. Ataullakhanov, J. R. McIntosh, “Force production by disassembling microtubules”, *Nature*, **438**:7066 (2015), 384–388.

⁷А. С. Кондрашов – племянник Э. Э. Шноля.

⁸См.: A. I. Khibnik, Yu. A. Kuznetsov, V. V. Levitin, E. V. Nikolaev, “Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps”, *Phys. D*, **62**:1–4 (1993), 360–371.

Для них разрабатывались алгоритмы и программы (бифуркации стационарных решений, предельных циклов и др.), а также давалось их детальное описание. Эти публикации, тщательно отредактированные Эммануилом Эльевичем, отличаются ясностью изложения и сохраняют свою ценность до наших дней. Пушинские алгоритмы и программы использовались во многих лабораториях нашей страны и за рубежом, став полезным инструментом для исследования бифуркаций в задачах естествознания и в чисто математических исследованиях.

Эммануил Эльевич щедро следовал замечательной традиции дарения идей, присущей московской математической школе, добавив к ней еще одно редкое качество. Это потребность и умение помочь разобраться в предмете, часто далеком от его собственного. В этом он видел свою важную обязанность, на которую не жалел сил и времени. Особенно это проявилось в годы его работы в Пушкино, когда спектр взаимодействия значительно расширился, включив в себя различные ветви естествознания. Его отличали способность и желание понимать работы своих коллег и зачастую находить связи, которые не заметил сам автор. В таком же стиле проходили руководимые им семинары и годовые научные конференции НИВЦ. Разговор с Эммануилом Эльевичем или выступление на семинаре с его участием давали мощный импульс к развитию работы.

Эммануилу Эльевичу была органически присуща потребность делиться знаниями – с коллегами самых разных специальностей, с начинающими учеными, с молодыми людьми и школьниками. Педагогика была его призванием, как и математика. Он учил своих многочисленных слушателей понимать “дух, а не букву” преподаваемого им материала, при этом оставаясь строгим и аккуратным в каждом утверждении. Такого же отношения к преподаванию он требовал и от своих сотрудников.

Э. Э. Шнолем в соавторстве с И. М. Гельфандом и Е. Г. Глаголевой была написана брошюра “Функции и графики” [17], переведенная на пять языков (включая немецкий, английский, японский). Это блестящее учебное пособие для многих поколений школьников⁹.

Общение Эммануила Эльевича с учениками не сводилось к обучению математике, а было настоящей многосторонней просветительской деятельностью. Более того, это было обучение стилю работы, организованности, взаимоотношениям с коллегами, научной честности, аккуратности и порядочности (“я могу забыть все что угодно, кроме того, что пообещал”); рядом с ним фальшивить было невозможно. Эммануил Эльевич был чрезвычайно щепетилен в вопросах своего авторства – список научных статей с его соавторством должен был быть существенно шире.

Эммануил Эльевич был прекрасным педагогом. За свою жизнь он прочитал множество лекций для слушателей самого разного возраста – для школьников в рамках Пушинского лектория (1982), для студентов во время работы на физтехе (1966–1971), для молодых коллег-математиков и вполне зрелых сотрудников, биологов и физиков, испытывающих потребность в глубоком понимании математики для более адекватного описания изучаемых процессов. На основе лекций по вычислительной математике, прочитанных в МФТИ и в Пушкино, была написана небольшая книжка [36]. Однако, по его собственному признанию, наиболее эффективной формой работы он считал семинар: “Лекции я читаю плохо, и мне это крайне трудно, а стихия моя – это семинары. Семинары или уроки в школе, когда есть обратная реакция, когда есть взаимодействие с аудиторией”. Обычно семинар, в котором Эммануил Эльевич принимал участие, заканчивался его финальным выходом к доске, где в течение нескольких минут он предельно четко и ясно формулировал и задачу, и полученные результаты, которые не всегда внятно формулировал докладчик, особенно если докладчиком был человек со стороны. При этом он считал совершенно естественной потребностью делиться своим огромным педагогическим опытом. Он подолгу работал с людьми,

⁹В их числе и ряд авторов этой статьи. Об истории написания этой брошюры см. [52].

которым предстояло выступление перед аудиторией, будь то защита диссертации, выступление на конференции или лекция для школьников. Один из примеров широты преподавательской деятельности Э.Э. Шноля – это его семинар, который назывался “100 задач Арнольда”. В течение года на этом семинаре разбирались задачи, приведенные в заметке В. И. Арнольда “Математический тривиум”.

Уважение к прошлому, к памяти – еще одна яркая черта Э.Э. Шноля. Например, он собрал и с присущей ему тщательностью привел в порядок аудио-, фото- и кино-материалы, запечатлевшие те или иные события и торжества. Теперь, спустя многие десятилетия, эти свидетельства прошлого бесценны. Благодаря Эммануилу Эльевичу собранные фотографии и фильмы, а также разнообразные аудиозаписи доступны теперь всем желающим. В частности, в архиве семьи Шнолей хранятся фотографии, посвященные закрытию Московской математической олимпиады 1958 г., празднованию 60-летия И. М. Гельфанда и многие другие. Эммануил Эльевич оставил многочисленные яркие и теплые воспоминания как о людях всемирно известных (Гельфанд, Кронрод, Келдыш, Петровский, см. [52]–[54]), так и о своих коллегах.

Э.Э. Шноль скончался 5 мая 2014 г. в Пущино. Те, кому посчастливилось быть близкими Эммануилу Эльевичу по работе или вне ее, сохраняют воспоминания о радости этого общения. Как написал его школьный ученик Арнольд Литвинов: “Каждому давалось, каждый взял то, что смог унести”.

А. И. Аптекарев, А. Л. Афендикова, Ф. И. Атауллаханов,
Н. К. Балабаев, В. Н. Бикташев, И. В. Бикташева,
Р. М. Борисюк, Н. Д. Введенская, Р. Д. Дагжесаманский,
Ю. Г. Зархин, Ю. С. Ильяшенко, В. Д. Лазно, В. Ю. Лунин,
Н. Л. Лунина, Е. В. Николаев, В. С. Посвянский,
М. А. Ройтберг, В. С. Рябенский, Л. Б. Ряшко, Я. Г. Синай,
В. М. Тихомиров, А. А. Токарев, А. Г. Уржумцев, А. И. Хибник

Избранные научные труды Э. Э. Шноля

- [1] “Строение идеалов в кольцах R_α ”, *Матем. сб.*, **27(69)**:1 (1950), 143–146.
- [2] “Замкнутые идеалы в кольце непрерывно дифференцируемых функций”, *Матем. сб.*, **27(69)**:2 (1950), 281–284.
- [3] “Об ограниченных решениях уравнения второго порядка в частных производных”, *Докл. АН СССР*, **89**:3 (1953), 411–413.
- [4] “О поведении собственных функций”, *Докл. АН СССР*, **94**:3 (1954), 389–392.
- [5] “Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **9**:4(62) (1954), 113–131.
- [6] “О поведении собственных функций уравнения Шредингера”, *Матем. сб.*, **42(84)**:3 (1957), 273–286.
- [7] “Об одном методе расчета напряжений в круговом цилиндре”, *Вычисл. матем.*, 1961, № 7, 75–94 (совм. с Н. Д. Введенской).
- [8] “Методы решения некоторых двумерных задач”, *Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники*, Сб., Машгиз, М., 1963, 99–103 (совм. с К. И. Бабенко, А. М. Молчановым, В. В. Русановым).
- [9] “О высокотемпературном пограничном слое в воздухе”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **8**:5 (1968), 1063–1075; англ. пер.: “A high-temperature boundary layer in air”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **8**:5 (1968), 165–182.
- [10] “О группах, действующих в фазовом пространстве”, *Матем. заметки*, **5**:1 (1969), 55–61; англ. пер.: “On groups acting in phase space”, *Math. Notes*, **5**:1 (1969), 36–39.
- [11] “О проблеме гравитационной устойчивости пылевого облака”, *Докл. АН СССР*, **185**:5 (1969), 1018–1021 (совм. с Л. Г. Хазиным); англ. пер.: “The problem of the

- gravitational stability of a dust cloud", *Soviet Physics Dokl.*, **14** (1969), 322–325 (with L. G. Khazin).
- [12] "О гравитационной устойчивости газового шара", *Астрон. журн.*, **46**:5 (1969), 970–977; англ. пер.: "The gravitational stability of a gas sphere", *Soviet Astron.*, **13**:5 (1970), 762–768.
- [13] "К теории вырожденного ферми-газа во внешнем поле", *ТМФ*, **4**:2 (1970), 239–245; англ. пер.: "Theory of a degenerate Fermi gas in an external field", *Theoret. and Math. Phys.*, **4**:2 (1970), 807–811.
- [14] "Замечания к теории квазистационарных состояний", *ТМФ*, **8**:1 (1971), 140–149; англ. пер.: "Remarks on the theory of quasistationary states", *Theoret. and Math. Phys.*, **8**:1 (1971), 729–736.
- [15] "Численные эксперименты по моделированию движения молекул. Ч. 1. Структурирование жидкости у отражающей границы", *Препринты ИПМ АН СССР*, 1971, №3, 27 с. (совм. с А. Г. Гривцовым); "Ч. 2. Адсорбция на гладкой поверхности", 1971, №4, 28 с. (совм. с А. Г. Гривцовым); "Ч. 3. Изолированная полимерная цепочка", 1972, №4, 38 с. (совм. с Н. К. Балабаевым, А. Г. Гривцовым).
- [16] "О группах, соответствующих простейшим задачам классической механики", *ТМФ*, **11**:3 (1972), 344–353; англ. пер.: "On groups that correspond to the simplest problems of classical mechanics", *Theoret. and Math. Phys.*, **11**:3 (1972), 557–564.
- [17] *Функции и графики*, 5-е изд., Библиотечка физ.-матем. школы, **2**, Наука, М., 1973, 96 с. (совм. с И. М. Гельфандом, Е. Г. Глаголевой); англ. пер. 2-го изд.: *Functions and graphs*, The Pocket Mathematical Library. Primer 2, Gordon and Breach Sci. Publ., New York–London–Paris, 1969, vii+102 pp. (with I. M. Gelfand, E. G. Glagoleva).
- [18] "О неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости", *ПММ*, **38**:3 (1974), 502–506; англ. пер.: "On the instability of plane-parallel flows of perfect fluid", *J. Appl. Math. Mech.*, **38**:3 (1974), 464–468.
- [19] "Об устойчивости звезды со скачком плотности, вызванным фазовым переходом", *Препринты ИПМ АН СССР*, 1974, №93, 16 с.
- [20] "Численное моделирование движения линейной полимерной цепочки", *Докл. АН СССР*, **220**:5 (1975), 1096–1098 (совм. с Н. К. Балабаевым, А. Г. Гривцовым); англ. пер.: "Numerical modeling of the movement of a linear polymeric chain", *Dokl. Phys. Chem.*, **220**:1-6 (1975), 110–113 (with N. K. Balabaev, A. G. Grivtsov).
- [21] "Устойчивость звезды при наличии фазового перехода", *Астрон. журн.*, **52**:5 (1975), 920–929 (совм. с Г. С. Бисноватым-Коганом, С. И. Блинниковым); англ. пер.: "The stability of a star in the presence of a phase transition", *Soviet Astron.*, **19**:5 (1976), 559–564 (with G. S. Bisnovaty-Kogan, S. I. Blinnikov).
- [22] "К вопросу о неединственности скорости распространения пламени", *Математические проблемы химии*, т. 1, Сб., ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975, 158–164 (совм. с В. С. Посвянским).
- [23] "Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости", *Докл. АН СССР*, **240**:6 (1978), 1309–1311 (совм. с Л. Г. Хазиным); англ. пер.: "The simplest cases of algebraic unsolvability in problems of asymptotic stability", *Soviet Math. Dokl.*, **19** (1978), 773–776 (with L. G. Khazin).
- [24] "О вырождении в простейшей задаче вариационного исчисления", *Матем. заметки*, **24**:5 (1978), 707–716; англ. пер.: "Degeneracy in the simplest problem of variational calculus", *Math. Notes*, **24**:5 (1978), 877–882.
- [25] "О классическом распределении Гиббса для углеродной цепочки", *Высокомолек. соединения. Сер. А*, **21**:7 (1979), 1632–1639 (совм. с Н. К. Балабаевым).
- [26] "Условия устойчивости равновесия при резонансе 1:3", *ПММ*, **44**:2 (1980), 229–237 (совм. с Л. Г. Хазиным); англ. пер.: "Equilibrium stability conditions under 1:3 resonance", *J. Appl. Math. Mech.*, **44**:2 (1980), 163–169 (with L. G. Khazin).

- [27] “Об устойчивости положений равновесия в критических случаях и в случаях, близких к критическим”, *ПММ*, **45:4** (1981), 595–604 (совм. с Л. Г. Хазиным); англ. пер.: “On the stability of the equilibrium position in critical and near-critical cases”, *J. Appl. Math. Mech.*, **45:4** (1981), 437–444 (with L. G. Khazin).
- [28] *Программы для качественного исследования дифференциальных уравнений*, Препринт, НЦБИ АН СССР, Пущино, 1982, 16 с. (совм. с А. И. Хибником).
- [29] “On the stability of equilibria of Hamiltonian systems near the main resonances”, *Celestial Mech.*, **33:2** (1984), 159–167.
- [30] *Устойчивость критических положений равновесия*, Изд-во НЦБИ АН СССР, Пущино, 1985, 215 с. (совм. с Л. Г. Хазиным); англ. пер.: [35].
- [31] “О синхронизации осцилляторов, взаимодействующих через среду”, *ПММ*, **51:1** (1987), 15–20; англ. пер.: “The synchronization of oscillators which interact via a medium”, *J. Appl. Math. Mech.*, **51:1** (1987), 9–13.
- [32] “On the interaction of vortices in two-dimensional active media”, *Phys. D*, **40:2** (1989), 185–195 (with E. A. Ermakova, A. M. Pertsov).
- [33] “On the diffraction of autowaves”, *Phys. D*, **44:1-2** (1990), 178–190 (with A. M. Pertsov, E. A. Ermakova).
- [34] “О приближении кривых линиями уровня однородных многочленов и о рядах по однородным многочленам”, *Матем. сб.*, **182:3** (1991), 421–430; англ. пер.: “On approximation of curves by level curves of homogeneous polynomials, and on series in homogeneous polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **72:2** (1992), 403–411.
- [35] *Stability of critical equilibrium states*, Nonlinear Sci. Theory Appl., Manchester Univ. Press, Manchester, 1991, xii+208 pp. (with L. G. Khazin); пер. с рус.: [30].
- [36] *Семь лекций по вычислительной математике*, ПНЦ РАН, Пущино, 1992, 105 с.
- [37] “The effect of selection on the phenotypic variance”, *Genetics*, **134:3** (1993), 995–996 (with A. S. Kondrashov).
- [38] “Some relations between different characteristics of selection”, *J. Math. Biology*, **32:8** (1994), 835–840 (with A. S. Kondrashov).
- [39] “Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений”, *Дифференц. уравнения*, **30:7** (1994), 1156–1167; англ. пер.: “Stability of fixed points of two-dimensional mappings”, *Differ. Equ.*, **30:7** (1994), 1071–1081.
- [40] “Об устойчивости линейных периодических систем, близких к гамильтоновым”, *ПММ*, **60:6** (1996), 951–958; англ. пер.: “Stability of linear almost-Hamiltonian periodic systems”, *J. Appl. Math. Mech.*, **60:6** (1996), 933–939.
- [41] “А. Г. Гривцов и молекулярная динамика – начало”, *Метод молекулярной динамики в физической химии*, Наука, М., 1996, 10–15.
- [42] “О функциях двух переменных, непрерывных вдоль прямых линий”, *Матем. заметки*, **62:2** (1997), 306–311; англ. пер.: “Functions of two variables continuous along straight lines”, *Math. Notes*, **62:2** (1997), 255–259.
- [43] *О потере устойчивости положений равновесия в симметричных системах дифференциальных уравнений*, Препринт, ИМПБ РАН, Пущино, 1998, 22 с.
- [44] “Bifurcations of cycles in systems of differential equations with a finite symmetry group. I, II”, *J. Dynam. Control Systems*, **4:3** (1998), 315–341, 343–363 (with E. V. Nikolaev).
- [45] “О бифуркациях симметричных положений равновесия, отвечающих двукратным собственным значениям”, *Матем. сб.*, **190:9** (1999), 127–150 (совм. с Е. В. Николаевым); англ. пер.: “On the bifurcations of equilibria corresponding to double eigenvalues”, *Sb. Math.*, **190:9** (1999), 1353–1376 (with E. V. Nikolaev).
- [46] “Решения нелинейной самосогласованной задачи для электрона в кластере, помещенном в сильное магнитное поле”, *Биофизика*, **44:3** (1999), 399–402 (совм. с А. Н. Коршуновой, В. Д. Лахно).

- [47] “Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **191**:8 (2000), 141–157; англ. пер.: “Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibria of ordinary differential equations”, *Sb. Math.*, **191**:8 (2000), 1243–1258.
- [48] “On exponentially attracting invariant manifolds of ODEs”, *Nonlinearity*, **16**:1 (2003), 147–160 (with L. B. Ryashko).
- [49] “Blood coagulation and propagation of autowaves in flow”, *Pathophysiol. Haemost. Thromb.*, **34**:2-3 (2005), 135–142 (with E. A. Ermakova, M. A. Panteleev).
- [50] “A molecular-mechanical model of the microtubule”, *Biophys. J.*, **88**:5 (2005), 3167–3179 (with M. I. Molodtsov, E. A. Ermakova, E. L. Grishchuk, J. R. McIntosh, F. I. Ataullakhanov).
- [51] “Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизация в модели свертывания крови”, *УФН*, **177**:1 (2007), 87–104 (совм. с Ф. И. Атауллахановым, Е. С. Лобановой, О. Л. Морозовой, Е. А. Ермаковой, А. А. Бутылиным, А. Н. Заикиным); англ. пер.: “Intricate regimes of propagation of an excitation and self-organization in the blood clotting model”, *Phys. Usp.*, **50**:1 (2007), 79–94 (with F. I. Ataullakhanov, E. S. Lobanova, O. L. Morozova, E. A. Ermakova, A. A. Butylin, A. N. Zaikin).
- [52] “Мой учитель – И. М. Гельфанд”, *Полином*, 2009, № 1, 22–27, <http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf> (Электронный ресурс).
- [53] “Мои студенческие годы”, *Полином*, 2010, № 1, 17–22, <http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2010-1.pdf> (Электронный ресурс).
- [54] “М. В. Келдыш и И. Г. Петровский”, *Семь искусств*, 2011, 1(14), <http://7iskusstv.com/2011/Nomer1/Shnol1.php> (Электронный ресурс).
- [55] “On the relationship between the load and the variance of relative fitness”, *Biol. Direct*, **6** (2011), 20, 4 pp. (with E. A. Ermakova, A. S. Kondrashov).
- [56] “Finite platelet size could be responsible for platelet margination effect”, *Biophys. J.*, **101**:8 (2011), 1835–1843 (with A. A. Tokarev, A. A. Butylin, E. A. Ermakova, G. P. Panasenko, F. I. Ataullakhanov).
- [57] “Continuous mathematical model of platelet thrombus formation in blood flow”, *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **27**:2 (2012), 191–212 (with A. Tokarev, I. Sirakov, G. Panasenko, V. Volpert, A. Butylin, F. Ataullakhanov).