ДИАЛЕКТИКА НЕАВТОНОМНЫХ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ: ТОЧНАЯ КАЛИБРОВКА И РАЗБРОС РЕЗУЛЬТАТОВ

Логофет Д.О.[1]

[1]*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия*
danilal@postman.ru

Аннотация: неавтономная матричная модель локальной популяции представлена набором «проекционных» матриц каждая из которых калибрована по данным на своем временнóм шаге и дает свой набор количественных характеристик – порою противоположных в прогнозе судьбы популяции. Результаты, обобщающие данные всего периода наблюдений, следует получать из усредненного набора матриц, а корректным типом осреднения выступает *структурно-геометрическое* среднее – новое понятие для теории матриц и практики матричных моделей популяций.

1. Введение

Огромным преимуществом матричной модели популяции с дискретной структурой $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ оказывается возможность калибровать «проекционную» матрицу $\boldsymbol{L}(t)$ по данным только двух последовательных учетов (в моменты t и $t+1$) и получить $\lambda_1(\boldsymbol{L}(t))$ – меру адаптации изучаемой популяции там и тогда, где и когда собраны данные. В этом сила матричных моделей как инструмента сравнительной демографии, но здесь же возникает и методическая проблема, когда имеется временнóй ряд данных по локальной популяции и нужно обобщить результаты всего периода наблюдений. Логика модели приводит к задаче *геометрического* осреднения заданного набора M неотрицательных матриц, участвующих в основном модельном уравнении

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{L}(t)\,\boldsymbol{x}(t),\ t = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{1}$$

(Логофет и др., 2017), а фиксированное *строение* (*pattern*) этих матриц, определенное графом жизненного цикла (ГЖЦ) организмов данного вида, исключает существование *точного* решения в задаче *структурно-геометрического* осреднения (*pattern-geometric* mean, Logofet, 2018).

Поиск решения *приближенного* сталкивается на практике с проблемой «репродуктивной неопределенности» (Логофет и др., 2016), когда данные, обеспечивая точную калибровку матрицы переходов $\boldsymbol{T}(t)$, допускают неоднозначность в калибровке стадийно специфических коэффициентов размножения – элементов матрицы плодовитости $\boldsymbol{F}(t)$. Тогда в стандартном представлении $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}$ получаем целое семейство матриц

$$\{\boldsymbol{L}(t)\} = \boldsymbol{T}(t) + \{\boldsymbol{F}(t)\}, \tag{2}$$

заданное (линейным) уравнением пополнения популяции (*ibidem*).

Эвристический подход к решению задачи осреднения в матричных моделях популяций в условиях репродуктивной неопределенности назван ***TF**-осреднением* (Logofet, 2018) и состоит в комбинации структурно-геометрического среднего для матриц $\boldsymbol{T}(t)$ и арифметического для семейств $\{\boldsymbol{F}(t)\}$, $t = 0, 1, \ldots, M-1$, которое сохраняет репродуктивную неопределенность, присущую осредняемым матрицам. Подход применен к данным по незабудочнику *Eritrichium caucasicum* – малолетнему растению альпийского пояса.

2. Как усреднять неавтономную матричную модель

Набор из M одношаговых матриц $\boldsymbol{L}(t)$ определяется в серии последовательных калибровок согласно уравнению 1, и тогда для структуры популяции в начальный и финальный моменты наблюдений имеем

$$\boldsymbol{x}(M) = \boldsymbol{L}(M-1)\,\boldsymbol{L}(M-2)\ldots\boldsymbol{L}(1)\,\boldsymbol{L}(0)\,\boldsymbol{x}(0). \tag{3}$$

Ключевой момент в логике осреднения состоит в том, что средняя матрица $\boldsymbol{G}$ должна давать тот же результат при подстановке ее вместо матриц-сомножителей, т.е.

$$\boldsymbol{G}^M = \boldsymbol{L}(M-1)\,\boldsymbol{L}(M-2)\,\ldots\,\boldsymbol{L}(1)\,\boldsymbol{L}(0). \quad (4)$$

Уравнение (4) соответствует понятию *геометрического среднего*, а требование, чтобы матрица $\boldsymbol{G}$ соответствовала тому же ГЖЦ, что и матрицы $\boldsymbol{L}(t)$, приводит к идее *структурно-геометрического* среднего и влечет наличие нулей в строении $\boldsymbol{G}$. Таким образом, число неизвестных элементов матрицы $\boldsymbol{G}$ меньше, чем n^2, а поскольку правая часть уравнения (4) есть матрица положительная, отсюда следует *переопределенность* системы поэлементных уравнений (4) и отсутствие точного решения задачи структурно-геометрического среднего.

3. Репродуктивная неопределенность в данных по *E. caucasicum*

вызвана тем, что в ГЖЦ (Логофет и др., 2016, рис. 2) есть две репродуктивных стадии, но их потомство неразличимо при ежегодных учетах на постоянных площадках (*ibidem*). В результате матрица $\boldsymbol{L}(t)$ принимает вид

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{T}(t) + \{\boldsymbol{F}(t)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 \\ 0 & f & h & 0 \\ 0 & k & l & 0 \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\},\ t = 0, 1, 2, 3, 4\ (M = 5), \quad (5)$$

где онтогенетические параметры $c(t)$, $d(t)$, …, $l(t)$ вычислены однозначно как частоты состоявшихся событий соответствующих переходов. Пять матриц $\boldsymbol{T}(t)$ откалиброваны однозначно по данным учетов (*ibidem*, табл. 3), а 5 семейств $\{\boldsymbol{F}(t)\}$ матриц плодовитости несут репродуктивную неопределенность в элементах $a(t)$ и $b(t)$, связанных уравнением пополнения

$$a(t)g(t) + b(t)gt(t) = j(t+1), \quad (6)$$

где $j(t+1)$, $g(t)$ и $gt(t)$ суть наблюдаемые численности ювенильной, генеративной и терминально генеративной групп соответственно (*ibidem*, табл. 2).

В результате только у двух из пяти одношаговых $\boldsymbol{L}(t)$ диапазон допустимых значений $\lambda_1(\boldsymbol{L}(t))$ расположен справа от 1, а у трех остальных иначе (*ibidem*, табл. 3). Погрешность приближенного решения $\boldsymbol{T}_{\mathbf{pg}}$ задачи структурно-геометрического среднего для $\boldsymbol{T}(t)$ оказалась удивительно малой (10^{-5}, Логофет и др., 2017), а $\boldsymbol{TF}$-осреднение матриц (5) дало диапазон $\lambda_1(\boldsymbol{L}_{\mathbf{TF}})$ целиком справа от 1 (Logofet, 2018, Table 2), чем закрыло вопрос о долговременной судьбе популяции по итогам 6-летних наблюдений.

4. Заключение

Противоречия в результатах неавтономной матричной модели популяции можно преодолеть путем структурно-геометрического осреднения ее одношаговых матриц $\boldsymbol{L}(t)$. В случае репродуктивной неопределенности данных на помощь приходит $\boldsymbol{TF}$-осреднение, причем структурно-геометрическое среднее матриц перехода вычисляется однозначно и позволяет получить определенные возрастные показатели из стадийно структурированной модели, в частности, ответить но вопрос, сколько лет живет малолетник.

Работа поддержана РФФИ, проект № 16-04-00832.

Литература

Логофет Д.О., Белова И.Н., Казанцева Е. С., Онипченко В. Г. Ценопопуляция незабудочника кавказского (*Eritrichium caucasicum*) как объект математического моделирования. I. Граф жизненного цикла и неавтономная матричная модель // Журн. общ. биологии. 2016. Т. 77. № 2. С. 106–121.

Логофет Д.О., Казанцева Е. С., Белова И.Н., Онипченко В. Г. Ценопопуляция незабудочника кавказского (*Eritrichium caucasicum*) как объект математического моделирования. II. Сколько лет живет малолетник? // Журн. общ. биологии. 2017. Т. 78. № 1. С. 56–66.

Logofet, D.O. Averaging the population projection matrices: heuristics against uncertainty and nonexistence // Ecological Complexity . 2018 (in press).