

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ПЛАНКТОНА: ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ, ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ



Александр Б. Медвинский

Институт теоретической и экспериментальной
биофизики РАН, Пущино, Россия

alexander_medvinsky@yahoo.com

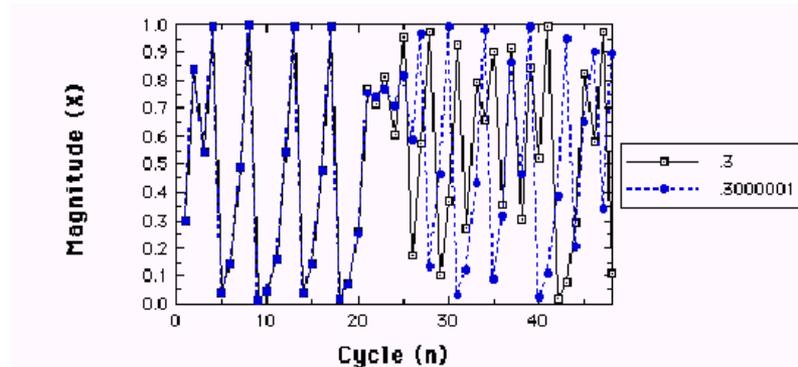
medvinsky@iteb.ru



ПРИМЕР ХАОТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

$$X(n+1)=3.99[X(n)][1-X(n)]$$

Детерминистические, т.е. вычисляемые на каждом шаге, временные ряды, задаваемые разностным уравнением, при близких начальных условиях, экспоненциально расходятся по прошествии 24 временных шагов.



Хаотические процессы чувствительны к начальным условиям.

Обратное верно не всегда!

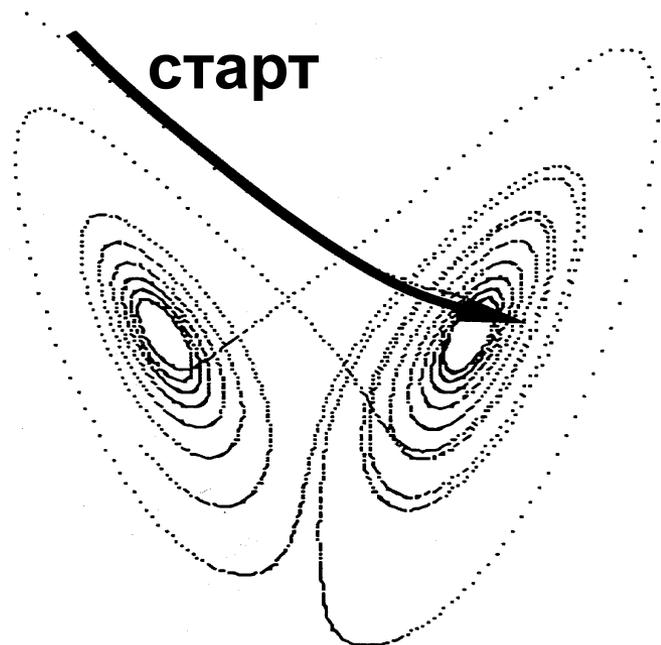
Расхождение хаотических временных рядов
возрастает по экспоненте:

$$\text{mod}[x_1(n)-x_2(n)] \sim \exp(\lambda \cdot n).$$

Здесь λ – доминантный ляпуновский показатель. Для хаоса $\lambda > 0$.

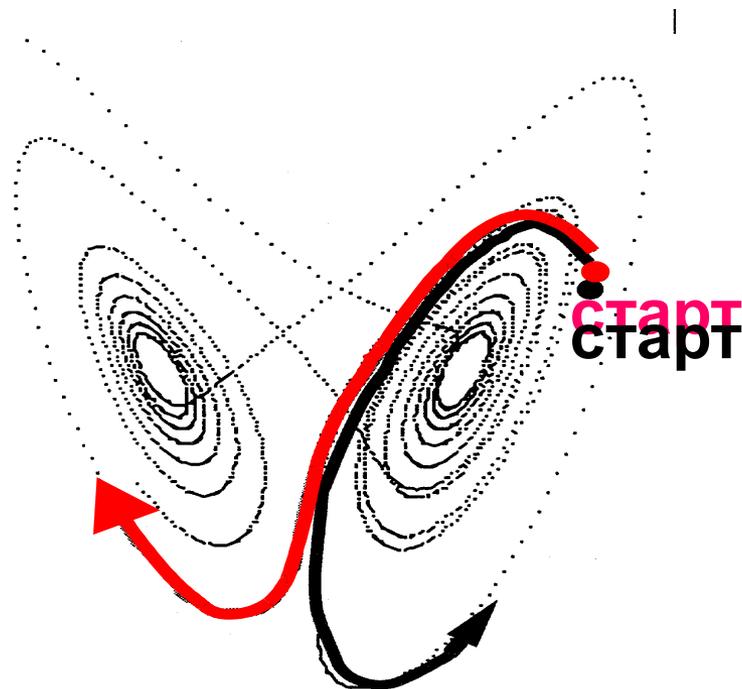
Горизонт предсказуемости $\sim 1/\lambda$.

Для диссипативных систем вводится
понятие притягивающего множества:
АТТРАКТОРА



**Фазовые траектории
притягиваются к аттрактору
из точек, лежащих вне его**

**Фазовые траектории внутри
хаотического аттрактора постепенно
расходятся друг от друга**



**Горизонт предсказуемости –
это то время,
в течение которого
фазовые траектории остаются близкими.**

ОЦЕНКА ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ НЕРЕГУЛЯРНОГО ПРОЦЕССА В ВИДЕ ВРЕМЕННОГО РЯДА $U(t)$, ГДЕ $0 \leq t \leq T$

(1) разделение временного ряда на два участка: например, от 0 до $T/2$ и от $T/2$ до T ;

(2) построение вектора, характеризующего динамику вблизи $t = T/2$:

$$\vec{u}\left(\frac{T}{2}\right) = \left(u\left(\frac{T}{2}\right), u\left(\frac{T}{2} - 1\right), u\left(\frac{T}{2} - 2\right), \dots, u\left(\frac{T}{2} - (d - 1)\right) \right),$$

где d – размерность пространства вложения;

(3) поиск на интервале от 0 до $T/2$ d -размерных векторов

$$\vec{U}(t_i) = (U(t_i), U(t_i - 1), \dots, U(t_i - (d - 1))), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

таких, что

$$\left| \vec{u}\left(\frac{T}{2}\right) - \vec{U}(t_i) \right| < \varepsilon; \quad \varepsilon \ll 1;$$

(4) предсказание численного значения $u(t)$ при $t = T/2 + 1$:

$$u'\left(\frac{T}{2} + 1\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U(t_i + 1);$$

ОЦЕНКА ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ (продолжение)

- (5) построение вектора $\vec{u}'\left(\frac{T}{2} + 1\right)$ в соответствии с пунктом (1) на предыдущем слайде и учёт того, что величина $\vec{u}'\left(\frac{T}{2} + 1\right)$ теперь известна;
- (6) следующая итерация на интервале от 0 до $T/2 + 1$, а затем – последующие итерации вплоть до достижения точки $t = T$;
- (7) вычисление ошибки предсказания:

$$E(t) = \frac{1}{n} \sum_{t=\frac{T}{2}+2}^{\frac{T}{2}+n} \left| \frac{u'(t) - u'(t-1)}{u(t) - u(t-1)} - 1 \right|$$

Очевидно, что чем меньше величина ошибки $E(n)$, тем лучше предсказание.

Этот алгоритм неплохо работает в случаях, когда длина анализируемого временного ряда достаточно велика: $n \sim 1000$ и больше.

Kaplan, D., Glass, L. *Understanding Nonlinear Dynamics*. New York: Springer, 1995.

Медвинский А.Б., Русаков А.В. Сложная динамика структурно простого социума. Проблема (не)предсказуемости. *Проблемы экономической истории: теория и практика*. Екатеринбург: УМЦ-УПИ, 2011, с. 248-275.

Medvinsky, A.B., Rusakov, A.V., Nurieva, N.I. Integer-based modeling of population dynamics: Competition between attractors limits predictability. *Ecological Complexity* **14**, 108-1116, 2013.

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ДОМИНАНТНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ХАОТИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Скорость дивергенции двух фазовых траекторий за время Δt :

$$S(\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{t_0=1}^T \ln \left(\frac{1}{U(\vec{b}(t_0))} \sum_{\vec{b}(t) \in U(\vec{b}(t_0))} |s(t_0 + \Delta t) - s(t + \Delta t)| \right).$$

Здесь $\vec{b}(t_0)$ – вектор в пространстве вложения размерности m , T – длина временного ряда, $U(\vec{b}(t_0))$ – ε -окрестность вектора $\vec{b}(t_0)$; ε -окрестность должна быть как можно меньше, но в тоже время достаточно велика для того, чтобы обеспечить достаточное число соседей референтного вектора $\vec{b}(t_0)$.

В некотором интервале значений Δt функция $S(\Delta t)$ в случае хаотического временного ряда растёт линейно с ростом Δt . Наклон функции на этом интервале позволяет численно оценить доминантный показатель Ляпунова λ .

Этот способ численной оценки λ неплохо работает в тех случаях, когда удачно подобрана величина размерности пространства вложения m , а длина анализируемого временного ряда достаточно велика: $T \sim 1000$ и более.

Kantz, H., Schreiber, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge: Cambridge University, 1997.

РЕКУРРЕНТНОСТЬ КАК ПРОЯВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

Наряду с дивергентностью, характеризуемой показателем Ляпунова, важной характеристикой, позволяющей выявить механизм и оценить предсказуемость динамики, является рекуррентность, т.е. повторяемость фазовой траектории исследуемой динамической системы.

Для визуализации рекуррентности траекторий используются рекуррентные диаграммы.

Рекуррентные диаграммы позволяют проводить оценку горизонта предсказуемости и степени хаотичности сравнительно коротких временных рядов: $T \sim 100$.

Eckmann, J.-P., Kamphorst, S.O. & Ruelle, D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters* **4**, 973-977, 1987.

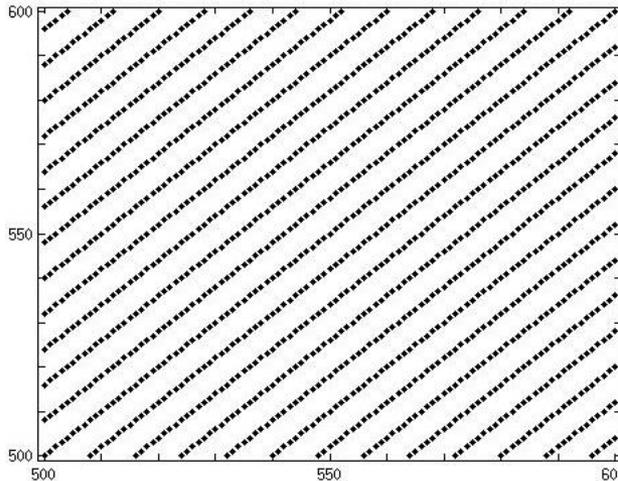
Marwan, N., Romano, M.C., Thiel, M., Kurths, J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports* **438**, 237-320, 2007.

ТИПЫ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИАГРАММ

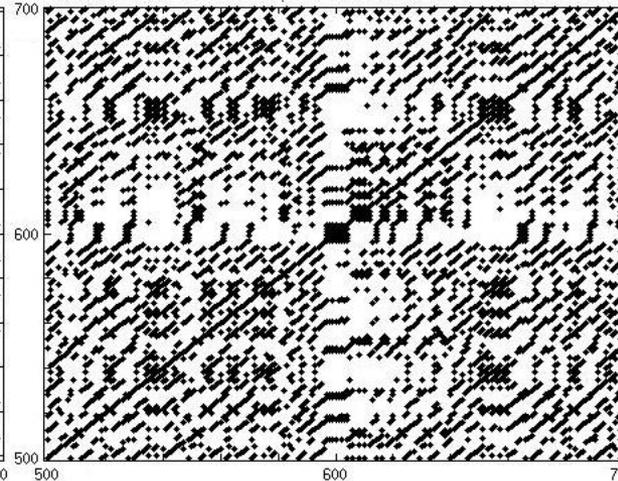


Мелодия белых линий
Павел Борисенко

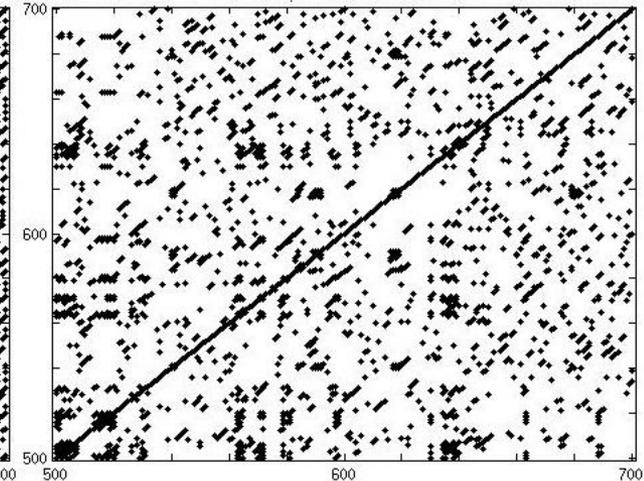
(a)



(b)



(c)

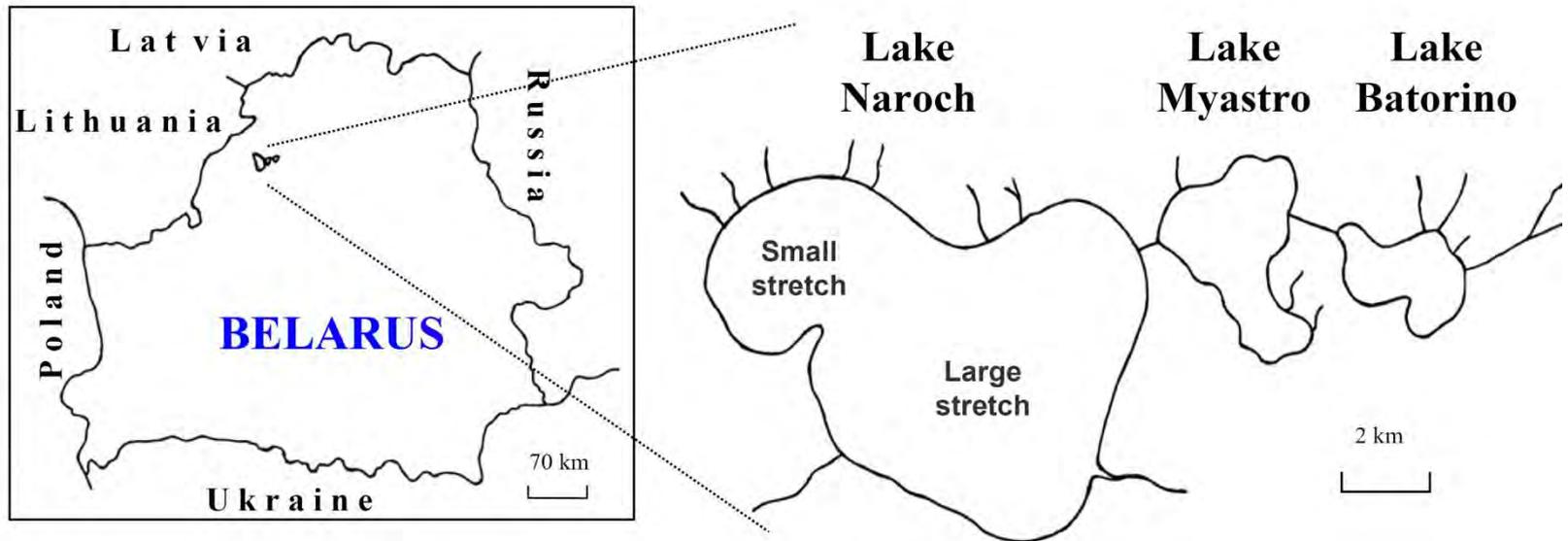


(a) Периодический процесс

(b) Хаос

(c) Случайный процесс

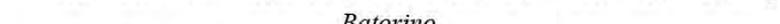
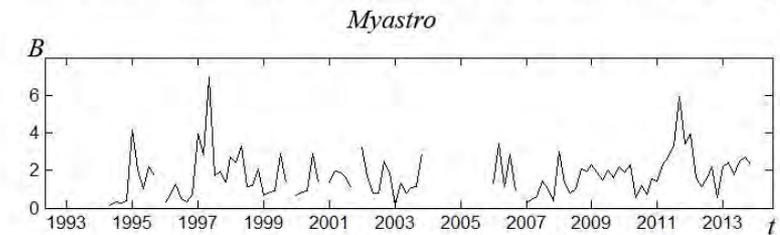
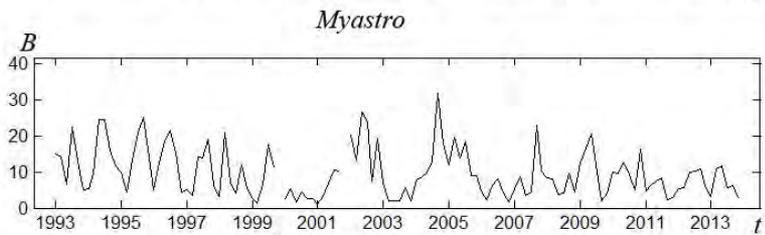
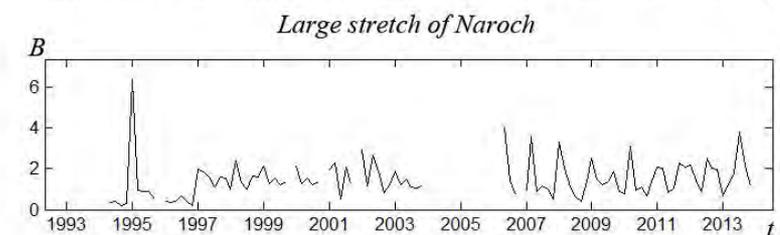
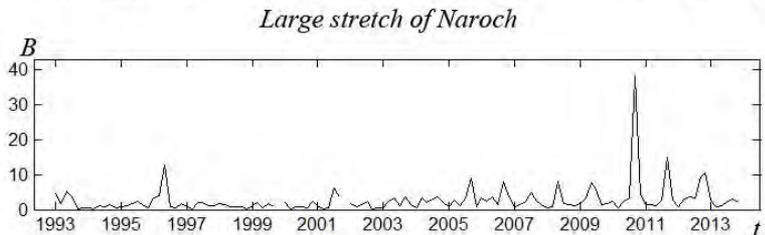
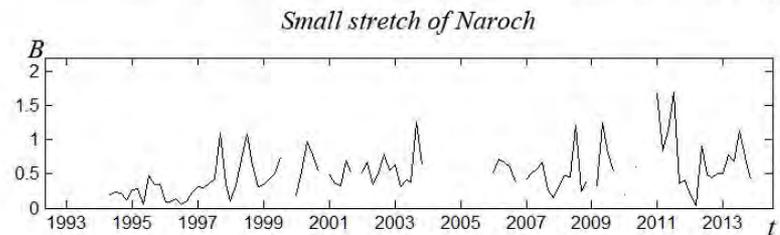
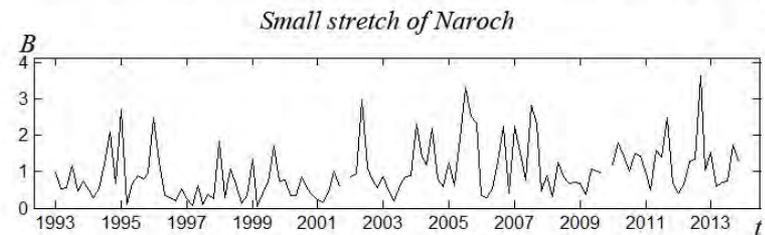
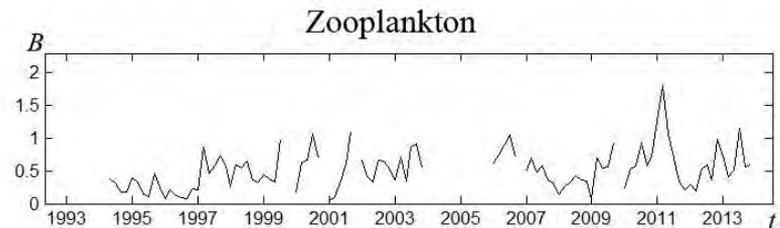
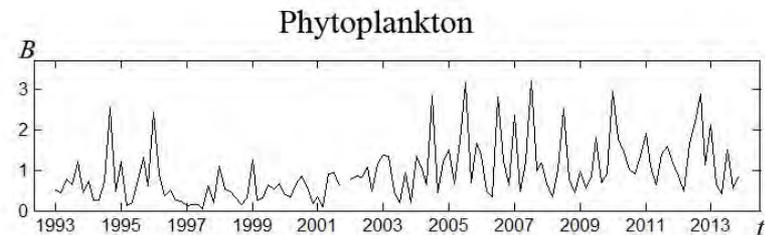
НАРОЧАНСКИЕ ОЗЁРА



Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nurieva, N.I., Radchikova, N.P., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series.

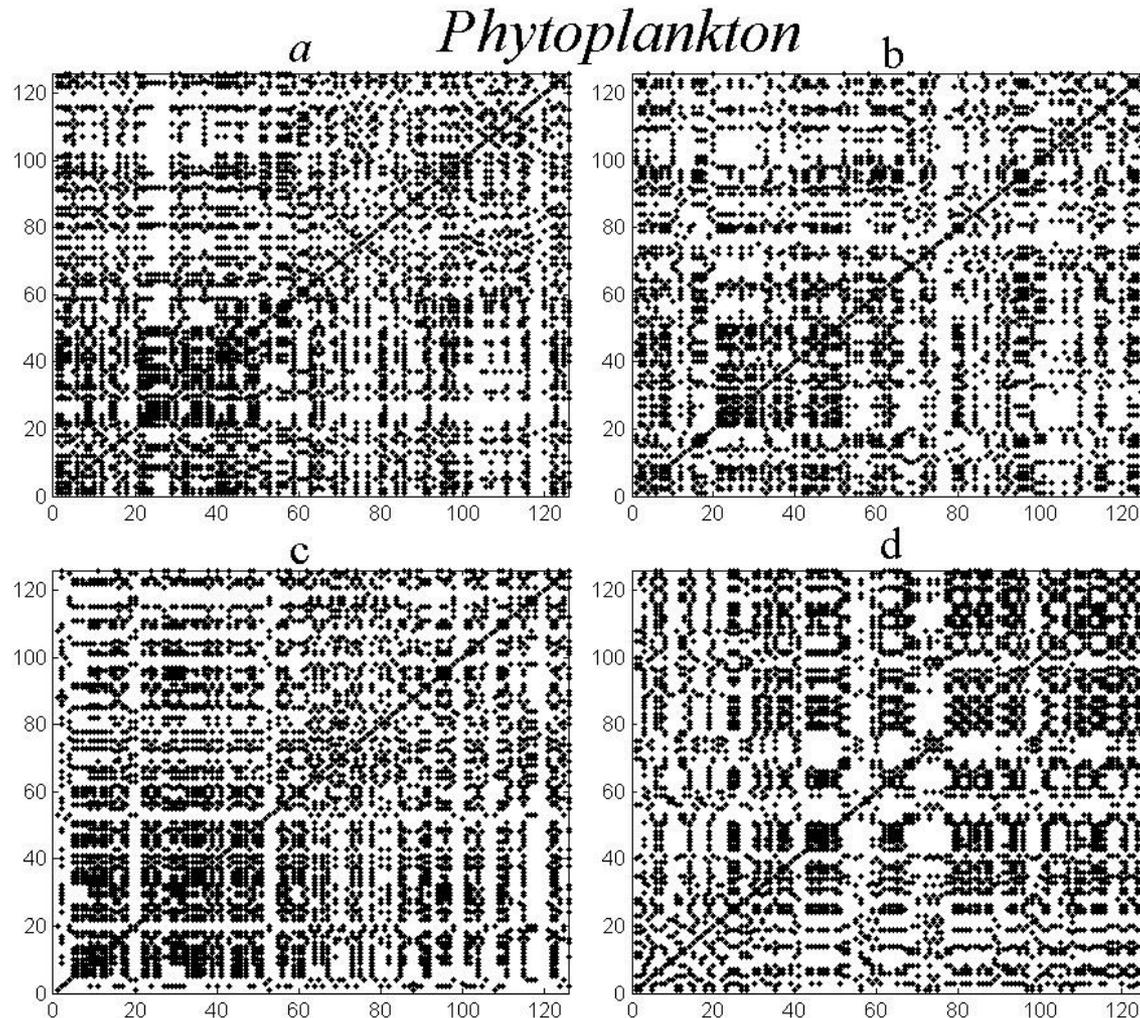
Ecological Complexity **23**, 61-67, 2015

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МНОГОЛЕТНЕГО МОНИТОРИНГА ДИНАМИКИ ПЛАНКТОНА В НАРОЧАНСКИХ ОЗЁРАХ



Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nurieva, N.I., Radchikova, N.P., Rusakov, A.V., Zhikova, T.V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series. *Ecological Complexity* **23**, 61-67, 2015

РЕКУРРЕНТНЫЕ ДИАГРАММЫ ФИТОПЛАНКТОНА



- a* – Малый плёс оз. Нарочь;
- b* – Большой плёс оз. Нарочь
- c* – оз. Мястро;
- d* – оз. Баторино

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nurieva, N.I., Radchikova, N.P., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series. *Ecological Complexity* **23**, 61-67, 2015

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ НИЖНЕГО ПРЕДЕЛА СУММЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА (K_2), ГОРИЗОНТА ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ (T_{pr}) И ДОМИНАНТНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА (Λ) ДЛЯ ФИТОПЛАНКТОНА КАЖДОГО ИЗ НАРОЧАНСКИХ ОЗЁР

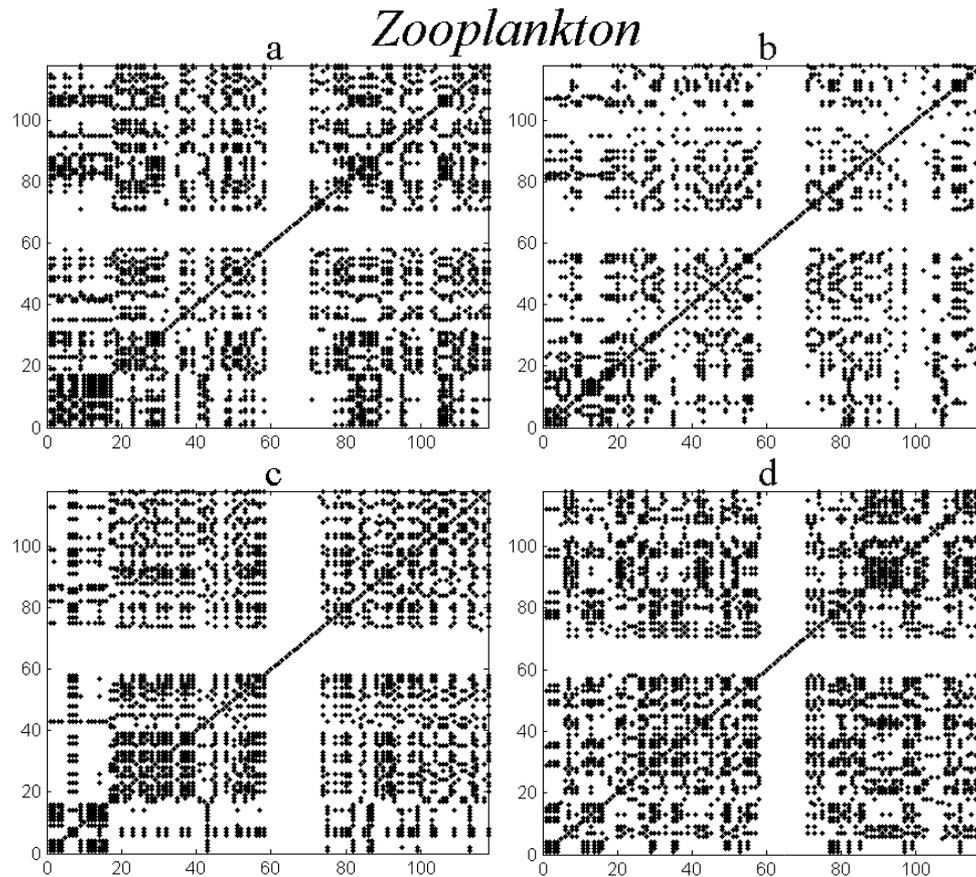
РЕЗУЛЬТАТЫ:

- (1) Λ – вне узкого интервала $[-0.1, +0.1]$, характерного для «жизни на краю хаоса»;
- (2) Величина Λ в трёх случаях гораздо меньше, чем K_2 . Это может означать, что хаотическая динамика характеризуется по крайней мере двумя степенями свободы, а следовательно (по теореме Такенса) требуется четырёх- или более размерное фазовое пространство для описания хаотической динамики фитопланктона.

Reservoir	K_2	T_{pr}	Λ
Naroch, Small stretch	1.4	2.4 months	0.4
Naroch, Large stretch	1.3	2.3 months	0.4
Myastro	0.7	2.5 months	0.4
Batorino	1.2	2.5 months	0.4

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nurieva, N.I., Radchikova, N.P., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series. *Ecological Complexity* **23**, 61-67, 2015

РЕКУРРЕНТНЫЕ ДИАГРАММЫ ЗООПЛАНКТОНА



a – Малый плёс
оз. Нарочь;
b – Большой плёс
оз. Нарочь
c – оз. Мястро;
d – оз. Баторино

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nurieva, N.I., Radchikova, N.P., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series. *Ecological Complexity* **23**, 61-67, 2015

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ НИЖНЕГО ПРЕДЕЛА СУММЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА (K_2), ГОРИЗОНТА ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ (T_{pr}) И ДОМИНАНТНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА (Λ) ДЛЯ ЗООПЛАНКТОНА КАЖДОГО ИЗ НАРОЧАНСКИХ ОЗЁР

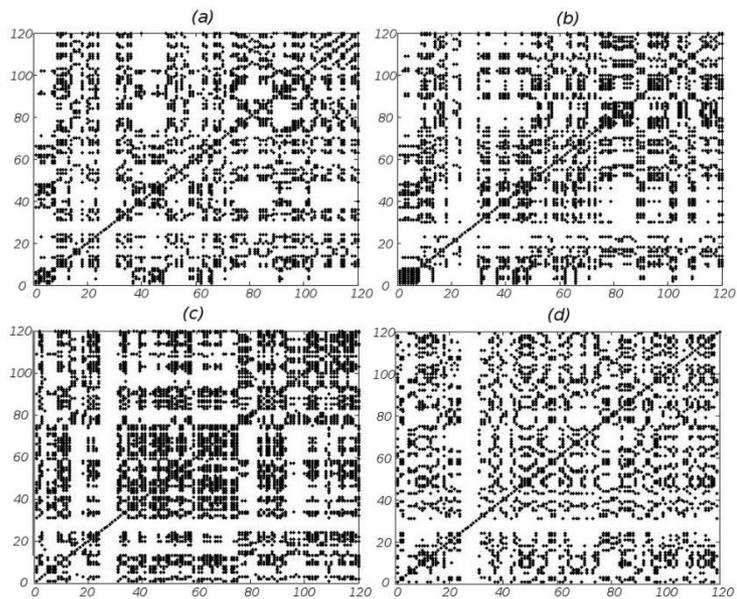
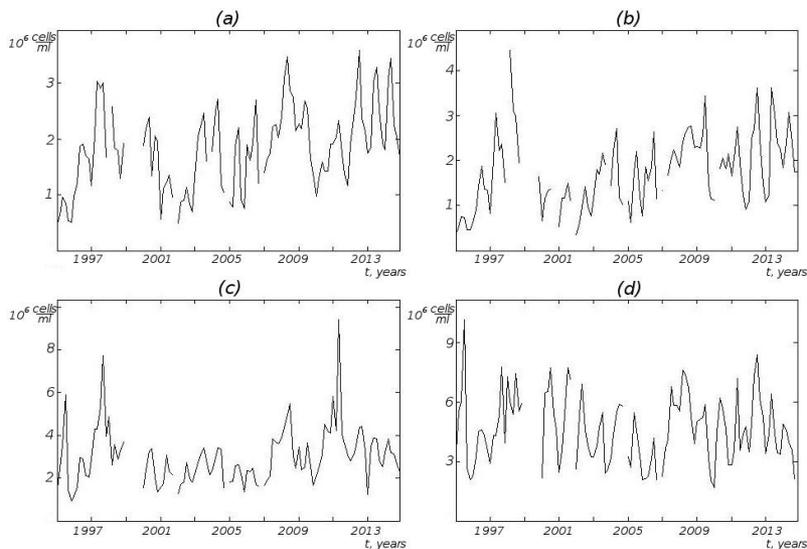
РЕЗУЛЬТАТЫ:

- (1) Λ – вне узкого интервала $[-0.1, +0.1]$, характерного для «жизни на краю хаоса»;
- (2) Величина Λ в трёх случаях гораздо меньше, чем K_2 . Это может означать, что хаотическая динамика характеризуется по крайней мере двумя степенями свободы, а следовательно (по теореме Такенса) требуется четырёх- или более размерное фазовое пространство для описания хаотической динамики зоопланктона.

Reservoir	K_2	T_{pr}	Λ
Naroch, Small stretch	1.1	2.5 months	0.4
Naroch, Large stretch	0.3	2.3 months	0.4
Myastro	1.3	2.5 months	0.4
Batorino	1.2	2.5 months	0.4

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nurieva, N.I., Radchikova, N.P., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series. *Ecological Complexity* **23**, 61-67, 2015

БАКТЕРИОПЛАНКТОН: ДИНАМИКА, РЕКУРРЕНТНЫЕ ДИАГРАММЫ



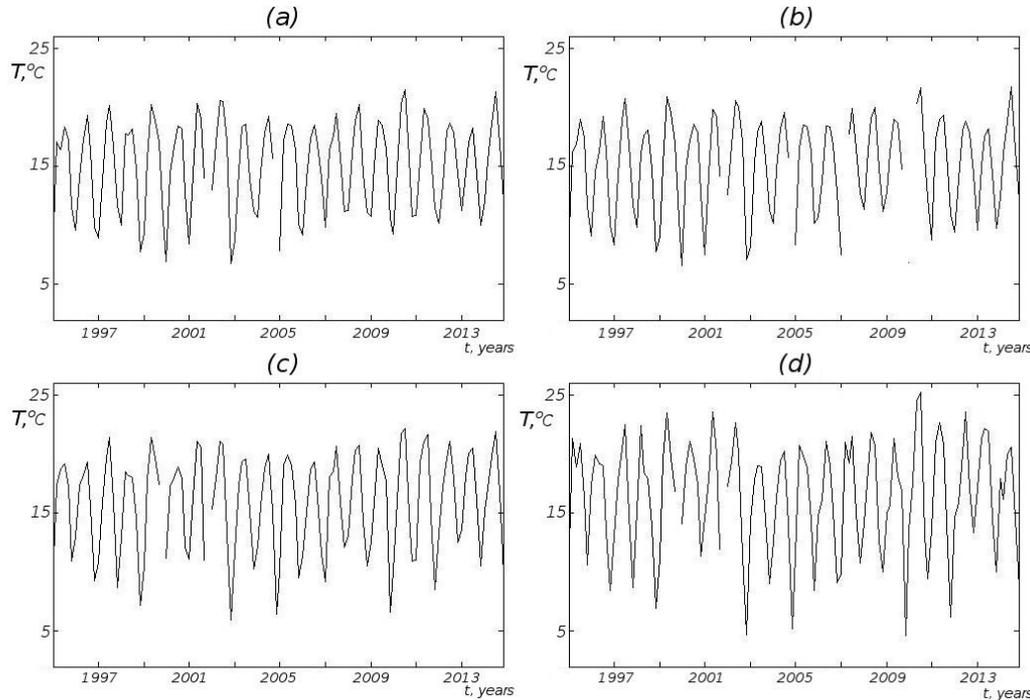
а – Малый плёс
оз. Нарочь;
б – Большой плёс
оз. Нарочь
с – оз. Мястро;
д – оз. Баторино

Reservoir	T_{pr}	Λ
Naroch, Small stretch	4.8 months	0.2
Naroch, Large stretch	4.7 months	0.2
Myastro	4.7 months	0.2
Batorino	3.4 months	0.3

**Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Aliev, R.R.,
Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M.,
Nikitina, L.V., Nurieva, N.I., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V.**
Temperature as a factor affecting fluctuations and
predictability of the abundance of lake bacterioplankton.
Ecological Complexity (in press)

Факторы, которые могут определять характер динамики и горизонт предсказуемости популяций:

(1) взаимодействия между популяциями,
(2) внешние факторы (например, колебания температуры).



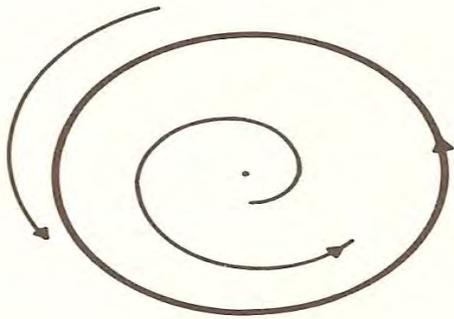
а – Малый плёс оз. Нарочь;
б – Большой плёс оз. Нарочь
с – оз. Мястро;
д – оз. Баторино

Вопрос: синхронизованы ли колебания численности планктона с колебаниями температуры?

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Aliev R.R., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nikitina, L.V., Nurieva, N.I., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Temperature as a factor affecting fluctuations and predictability of the abundance of lake bacterioplankton. *Ecological Complexity* (in press)

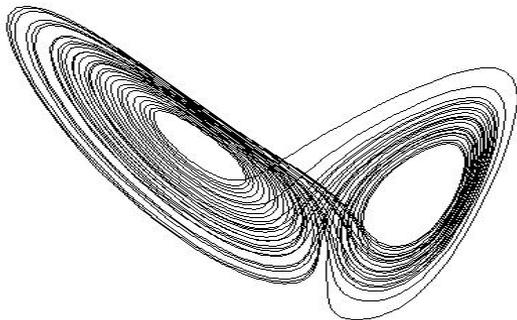
Полная синхронизация предполагает полную идентичность взаимодействующих осцилляторов.

Фазовая синхронизация предполагает установившуюся разность фаз. Но амплитуды взаимодействующих осцилляторов могут быть нескоррелированными.



Как для регулярных, так и нерегулярных колебаний фаза может быть представлена в виде линейной функции времени таким образом, чтобы фаза принимала значение 2π при достижении максимума колебаний (например, колебаний размера популяции):

$$\varphi(t) = 2\pi(n + (t - t(n)) / (t(n+1) - t(n))), \quad t(n) \leq t \leq t(n+1).$$



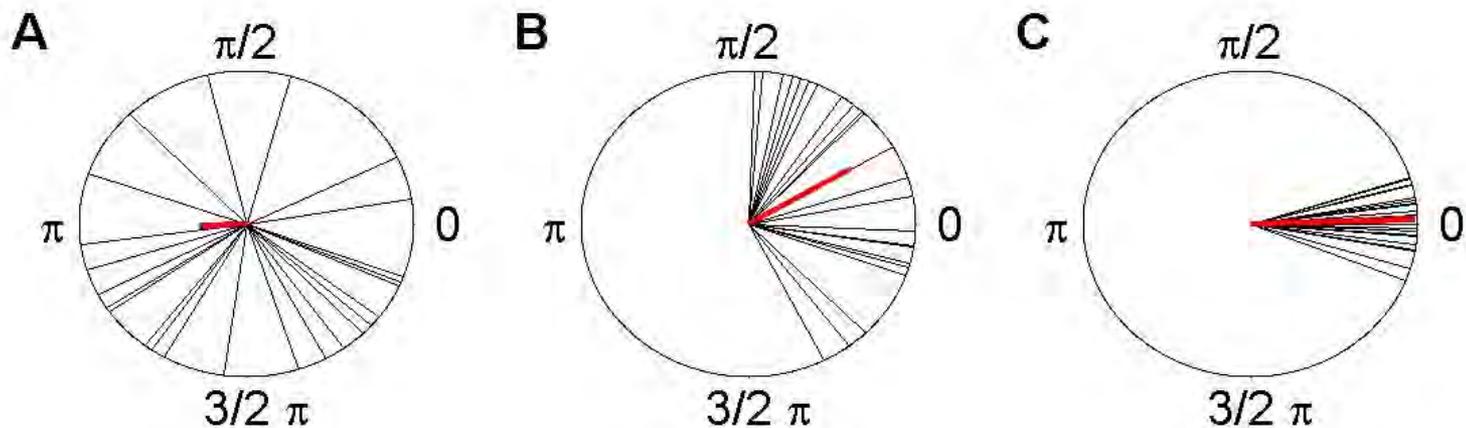
Здесь $t(k)$ ($k=n, n+1$) суть k -th момент времени, которому соответствует максимум колебаний.

PHASE-LOCKING INDEX (PLI) КАК МЕРА ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

$$PLI = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\Delta\varphi(j)} \right|.$$

Здесь N – число измерений, а $\Delta\varphi$ – разность фаз между исследуемыми колебательными процессами.

Kuramoto, Y. (1984) *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin, Heidelberg: 1984



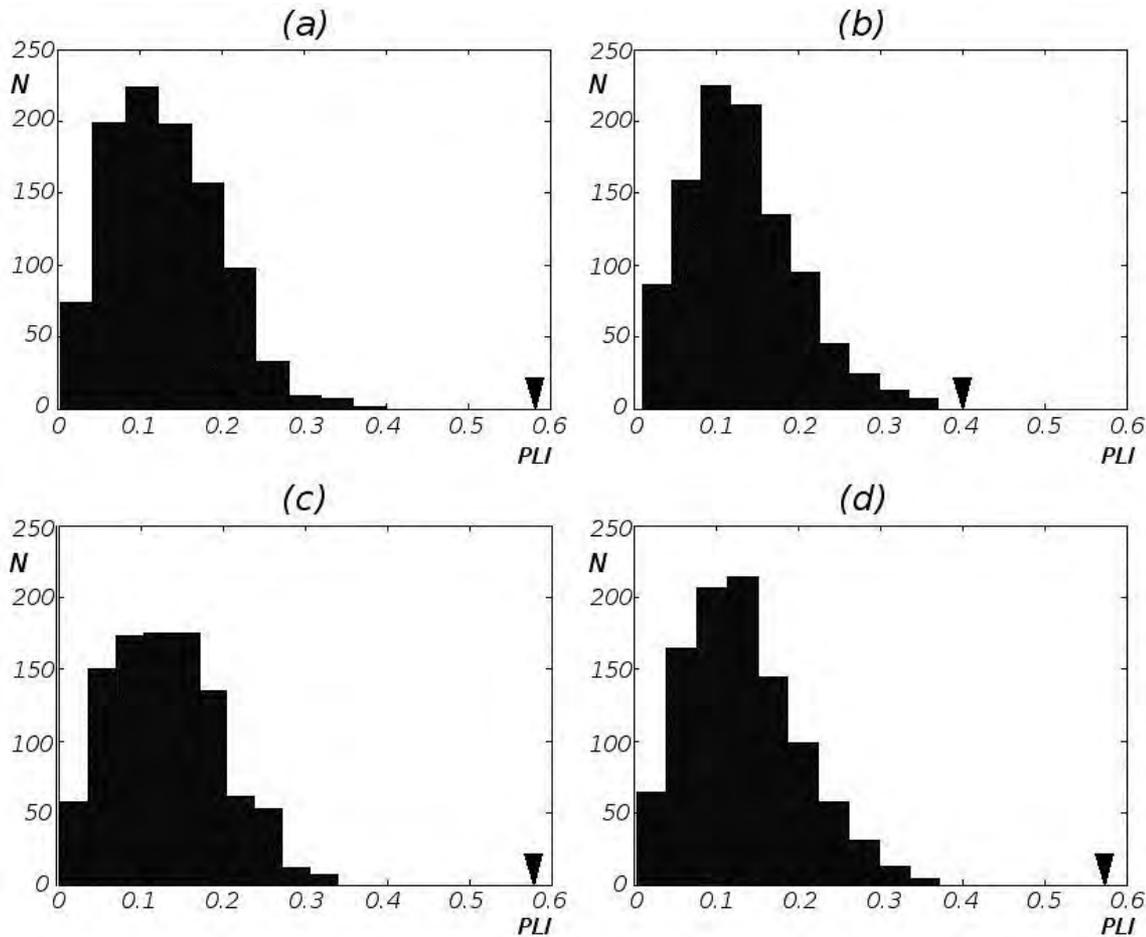
Распределение разности фаз ($\Delta\varphi$) и усреднённая разность фаз (показана красным цветом).

А – слабо синхронизованные временные ряды (величина PLI близка к 0).

В – умеренно синхронизованные временные ряды.

С – сильно синхронизованные временные ряды ($PLI \approx 1$).

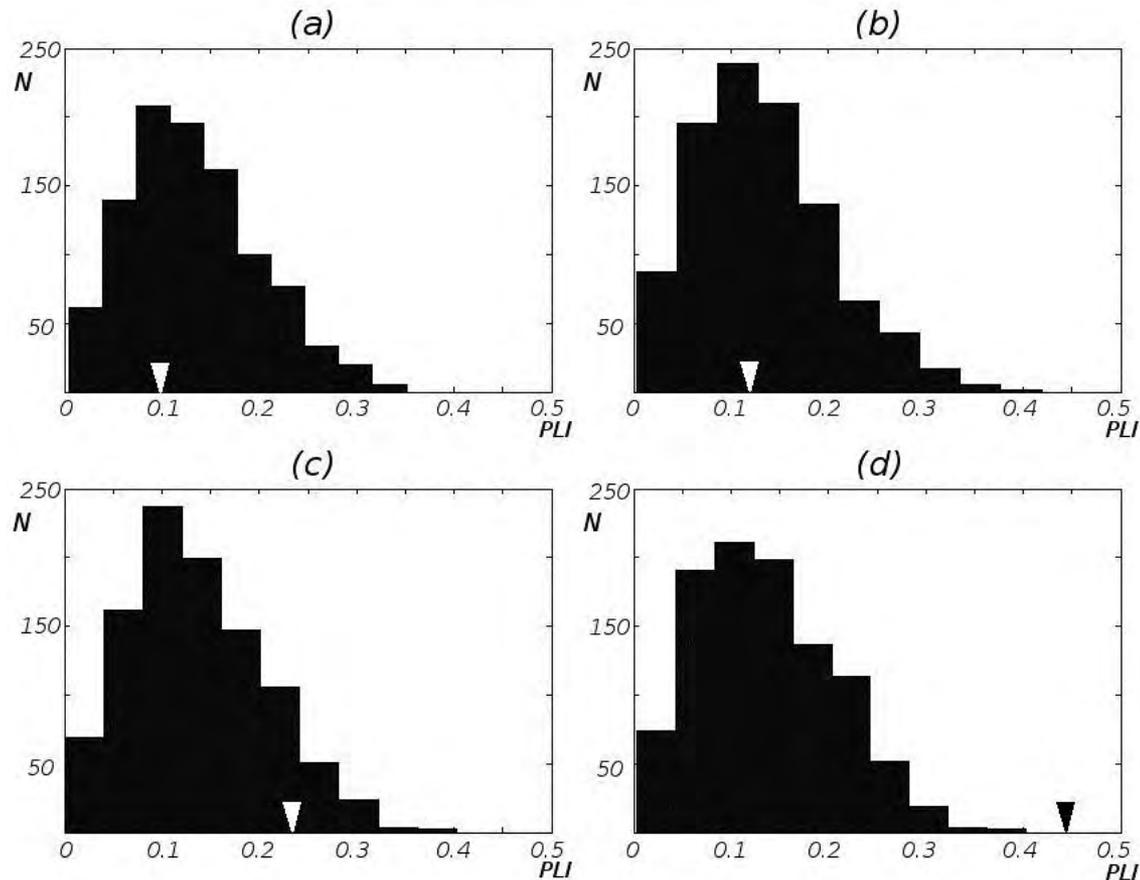
ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ БАКТЕРИОПЛАНКТОНА И ТЕМПЕРАТУРЫ: случайная или причинно обусловленная?



а – Малый плёс
оз. Нарочь;
б – Большой плёс
оз. Нарочь
с – оз. Мястро;
д – оз. Баторино

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Aliev R.R., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nikitina, L.V., Nurieva, N.I., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Temperature as a factor affecting fluctuations and predictability of the abundance of lake bacterioplankton. *Ecological Complexity* (in press)

ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ФИТОПЛАНКТОНА И ТЕМПЕРАТУРЫ: случайная или причинно обусловленная?



а – Малый плёс
оз. Нарочь;
б – Большой плёс
оз. Нарочь
с – оз. Мястро;
д – оз. Баторино

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Aliev R.R., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nikitina, L.V., Nurieva, N.I., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Temperature as a factor affecting fluctuations and predictability of the abundance of lake bacterioplankton. *Ecological Complexity* (in press)

**В ЧЁМ ПРИЧИНА РАЗЛИЧИЙ
В ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕМПЕРАТУРЫ
НА КОЛЕБАНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ
ФИТОПЛАНКЦИОНА И ЗООПЛАНКТОНА
В НАРОЧАНСКИХ ОЗЁРАХ?**

#1 КОНТРОЛЬ СО СТОРОНЫ ЗООПЛАНКТОНА

Такой контроль может проявляться в виде редукации численности фитопланктона за счёт его потребления зоопланктоном (Gulati, 1990). Однако бактериопланктон в гораздо меньшей степени подвержен такому контролю, поскольку воздействие зоопланктона на бактериопланктон носит разнонаправленный характер: численность бактериопланктона может как уменьшаться за счёт его потребления зоопланктоном, так и увеличиваться за счёт генерации зоопланктоном питательных веществ, в которых нуждается бактериопланктон (Gurung et al., 2000).

В результате колебания численности бактериопланктона и фитопланктона оказываются слабо связанными друг с другом. В этом случае заметная синхронность колебаний температуры и бактериопланктона не распространяется на колебания численности фитопланктона. Примечательно, что в эвтрофных водоёмах (таких, как оз. Баторино) контроль со стороны зоопланктона ослабевает (Perissinotto, 1992), и в результате колебания и бактериопланктона, и фитопланктона могут синхронизоваться с колебаниями температуры.

Gulati, R.D. (1990) Structural and grazing responses of zooplankton community to biomanipulation of some Dutch water bodies. *Hydrobiologia* **200/201**, 99-118.

Gurung, T.B., Nakanishi, M., Urabe, J. (2000) Seasonal and vertical difference in negative and positive effects of grazers on heterotrophic bacteria in Lake Biwa. *Limnology and Oceanography* **45**, 1689-1696.

Perissinotto, R. (1992) Mesozooplankton size-selectivity and grazing impact on the phytoplankton community of the Prince Edward Archipelago (Southern Ocean). *Marine Ecology Progress Series* **79**, 243-258.

#2 КОНТРОЛЬ СО СТОРОНЫ ПИТАТЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ

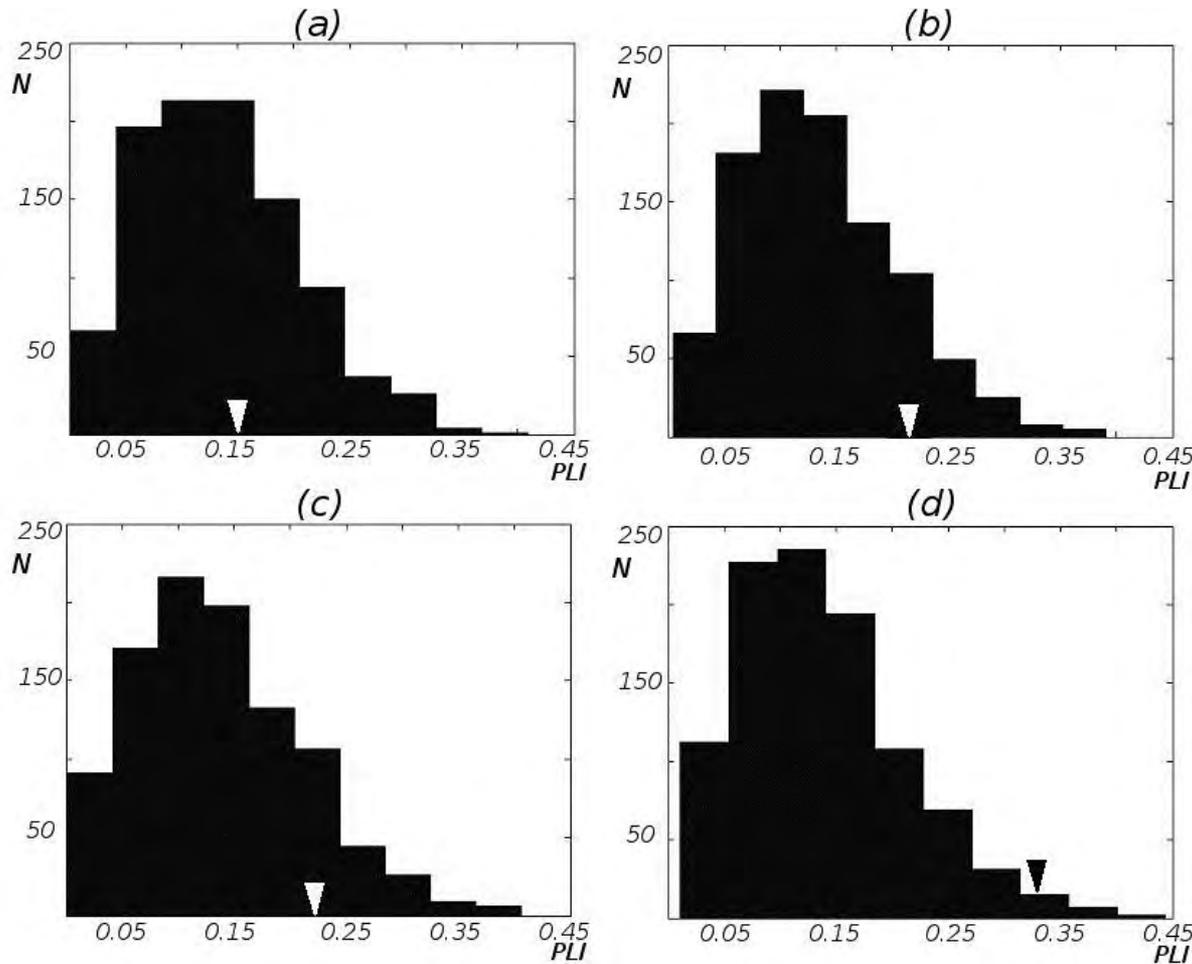
Динамика бактерио- и фитопланктона может зависеть от концентрации неорганических питательных веществ (Vrede, K., Vrede, T., Isaksson, A. et al., 1999) и, в частности, от отношения молярных концентраций азота и фосфора, N/P. Высокие/низкие значения N/P приводят к сопряжению/разобщению колебаний бактерио- и фитопланктона (Le et al., 1994).

Такое сопряжение имеет место в оз. Баторино, где величина N/P более чем в 5 раз превышает величину N/P в оз. Нарочь и в 20 раз – в оз. Мястро. Эти различия могут обусловить, с одной стороны, сопряжение и существенную синхронизацию с температурой колебаний бактерио- и фитопланктона, выявленную при анализе соответствующих временных рядов, полученных для оз. Баторино, а с другой стороны - к разобщению колебаний бактерио- и фитопланктона в озёрах Мястро и Нарочь и, в результате, к десинхронизации колебаний численности фитопланктона и колебаний температуры.

Le, J., Wehr, J.D., Campbell, L. (1994) Uncoupling of bacterioplankton and phytoplankton production in fresh waters is affected by inorganic nutrient limitation. *Applied and Environmental Microbiology* **60**, 2086-2093.

Vrede, K., Vrede, T., Isaksson, A. et al. (1999) Effects of nutrients (phosphorous, nitrogen, and carbon) and zooplankton on bacterioplankton and phytoplankton - a seasonal study. *Limnology and Oceanography* **44**, 1616–1624.

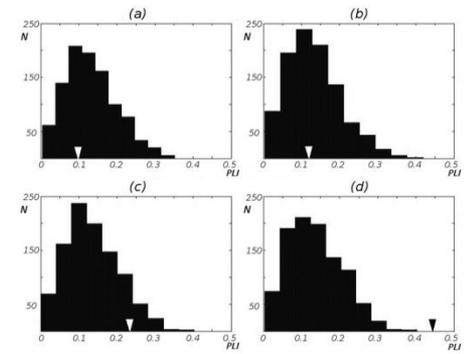
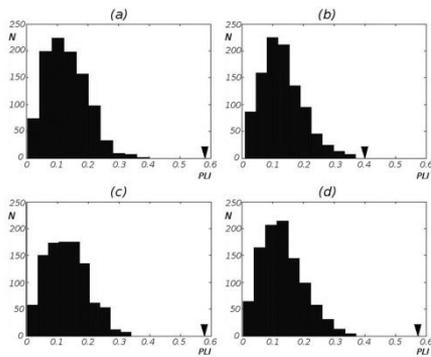
ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ФИТОПЛАНКТОНА И БАКТЕРИОПЛАНКТОНА: случайная или причинно обусловленная?



a – Малый плёс
оз. Нарочь;
b – Большой плёс
оз. Нарочь
c – оз. Мястро;
d – оз. Баторино

Medvinsky, A.B., Adamovich, B.V., Aliev R.R., Chakraborty, A., Lukyanova, E.V., Mikheyeva, T.M., Nikitina, L.V., Nurieva, N.I., Rusakov, A.V., Zhukova, T.V. Temperature as a factor affecting fluctuations and predictability of the abundance of lake bacterioplankton. *Ecological Complexity* (in press)

В ЧЁМ ПРИЧИНА РАЗЛИЧИЙ
В ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕМПЕРАТУРЫ
НА КОЛЕБАНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ
ФИТОПЛАНКИОНА И ЗООПЛАНКТОНА
В НАРОЧАНСКИХ ОЗЁРАХ?



Температура, по-видимому, является тем фактором, который не непосредственно воздействует на фазовую синхронизацию колебаний температуры и фитопланктона, а является индикатором сопряжения или разобщения колебаний бактериопланктона и фитопланктона.



Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН

Алиев Р.Р. (Пушино)

Медвинский А.Б. (Пушино)

Нуриева Н.И. (Пушино)

Русаков А.В. (Пушино)

Белорусский государственный университет

Адамович Б.В. (Минск)

Лукьянова Е.В. (Минск)

Михеева Т.М. (Минск)

Никитина Л.В. (Минск)

Жукова Т.В. (Нарочь)

Российский национальный исследовательский университет им. Н.И. Пирогова

Радчикова Н.П. (Минск)

Центральный университет Раджастана

Чакраборти А. (Бандар Синдри)

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ...