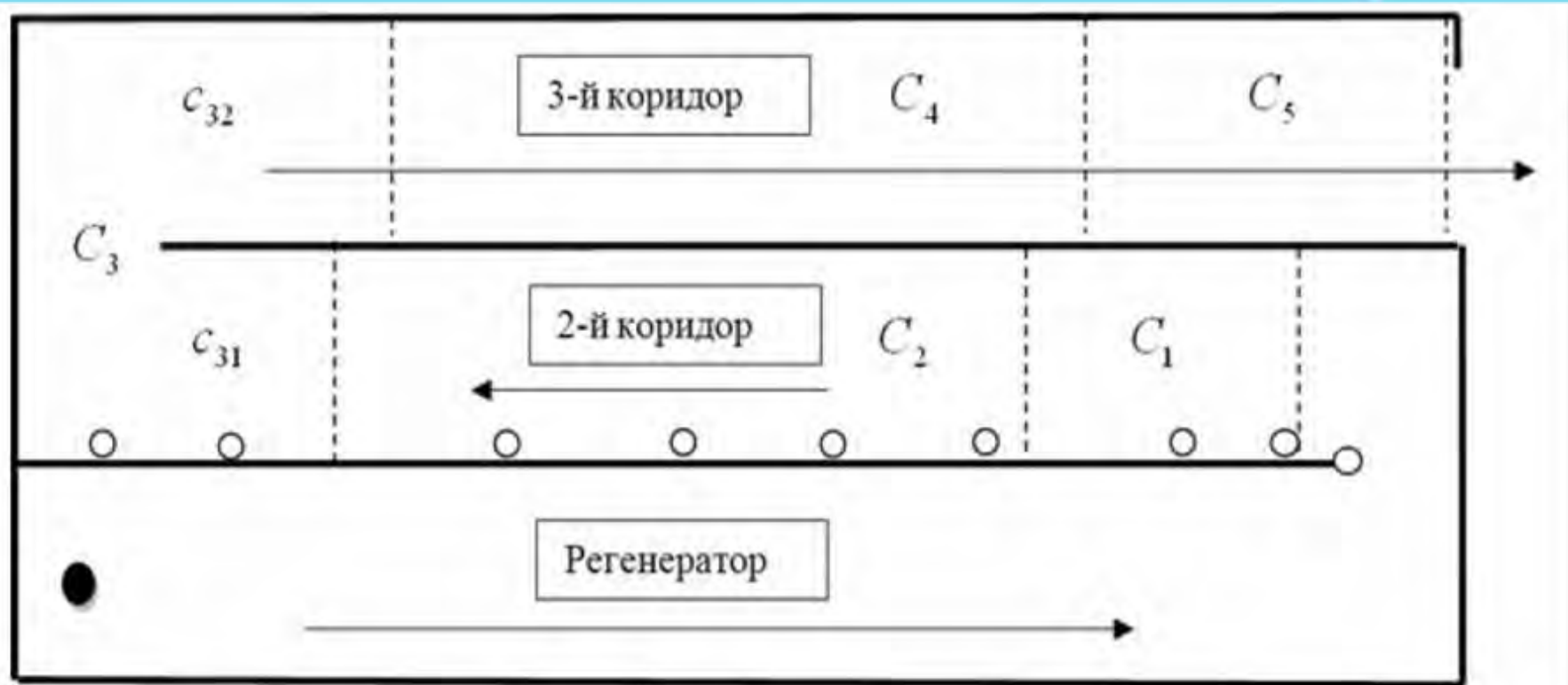


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
НИТРИФИКАЦИИ И  
ОКИСЛЕНИЯ ОРГАНИЧЕСКИХ  
ВЕЩЕСТВ В СИСТЕМЕ  
БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ

Смирнов Н. В.

ИПМИ КарНЦ РАН

# Схема аэротенка



- – место вхождения сточной воды в аэротенк
- – место вхождения иловой смеси в аэротенк
- – направление движения иловой смеси
- – границы компарментов

# Концентрации:

$S_S$  - легко биоразложимых органических веществ,

$S_{NH}$  - аммония азота,

$X_H$  - гетеротрофов,

$X_A$  - автотрофов,

$S_O$  - кислорода.

Экспериментальные данные:  $S_S, S_{NH}, S_O, X = X_A + X_H$  .

# Расчет концентраций в местах вхождения СТОЧНОЙ ВОДЫ

$$S_{S,i+1}^{in} = \frac{S_S^* \cdot V_{cv,i} + S_{S,i} \cdot V_i}{V_{cv,i} + V_i}, \quad S_{NH,i+1}^{in} = \frac{S_{NH}^* \cdot V_{cv,i} + S_{NH,i} \cdot V_i}{V_{cv,i} + V_i},$$

$$X_{H,i+1}^{in} = \frac{X_{H,i} \cdot V_i}{V_{cv,i} + V_i}, \quad X_{A,i+1}^{in} = \frac{X_{A,i} \cdot V_i}{V_{cv,i} + V_i}.$$

$V_{cv,i}$  – объём сточной воды, входящей в  $i$ -ый участок

$V_i$  – объём  $i$ -ого участка

$S^*$ ,  $X^*$  – концентрации в сточной воде,

$S_{j,i}$ ,  $X_{j,i}$  – концентрации на выходе  $(i-1)$ -ого субкомпартамента,

$S_{j,i}^{in}$ ,  $X_{j,i}^{in}$  – концентрации на входе в  $i$ -ый субкомпартамент.

# Математическая модель процесса биоочистки

$$f(x, p) = \frac{x}{x + p} \text{ - трофическая функция Моно}$$

$$f_1(S_S) = \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}}$$

$$f_2(S_S, S_{NH}, K_\alpha) = \frac{S_{NH} / (S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH} / (S_S - c)}$$

- пороговые функции.

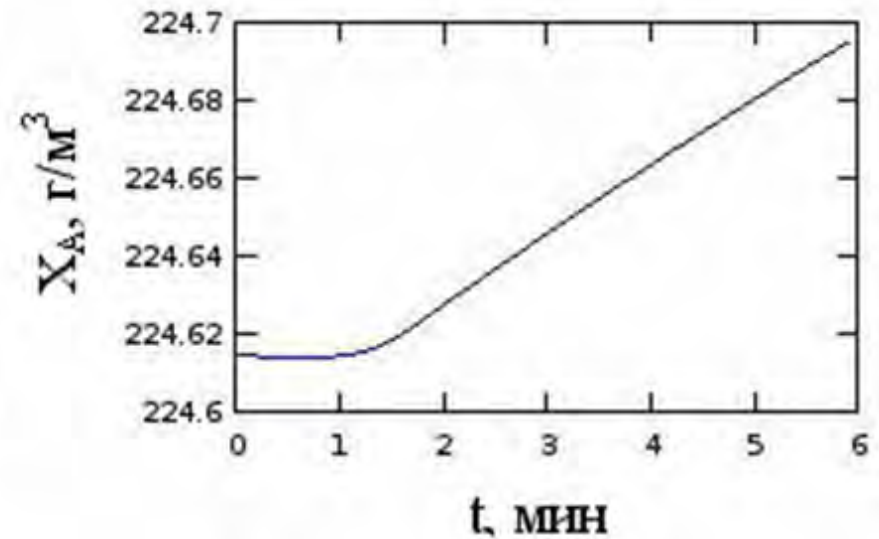
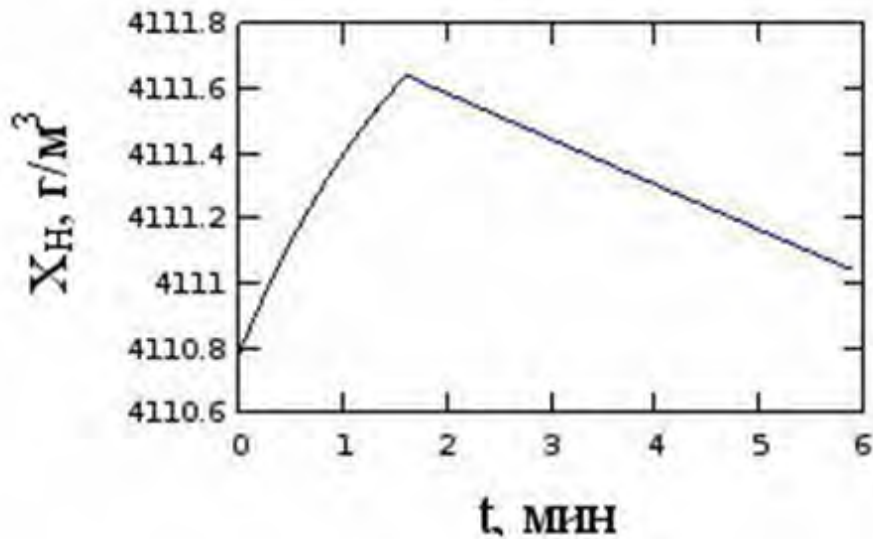
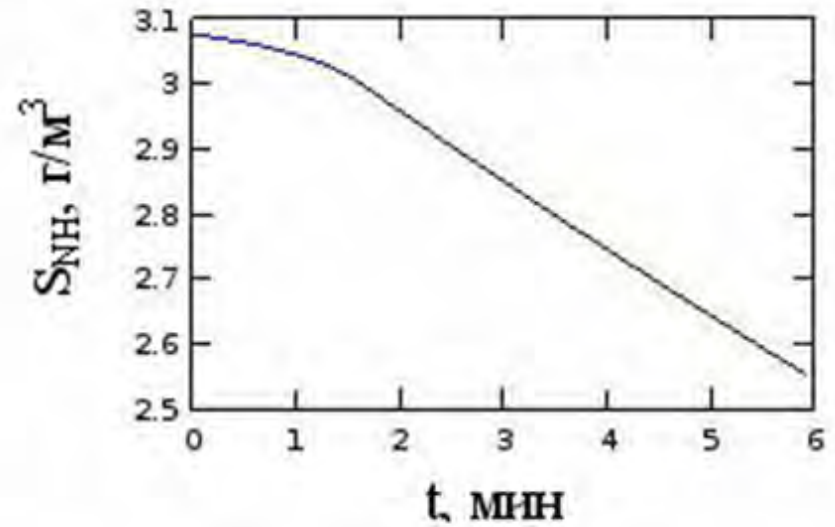
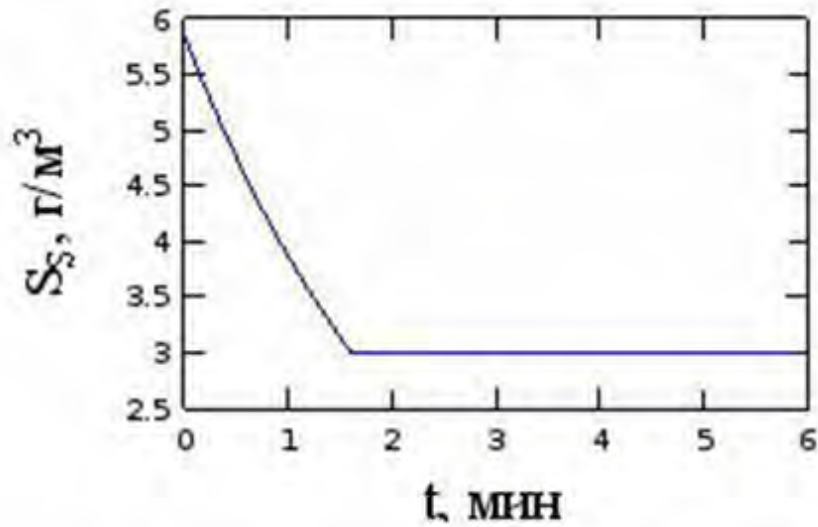
$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - \frac{\mu_H}{Y_H} f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}} X_H, \quad (1)$$

$$\dot{S}_{NH} = Q(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \frac{\mu_A}{Y_A} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH} / (S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH} / (S_S - c)} X_A, \quad (2)$$

$$\dot{X}_H = Q(X_H^{in} - X_H) + \left( \mu_H f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}} - b_H \right) X_H, \quad (3)$$

$$\dot{X}_A = Q(X_A^{in} - X_A) + \left( \mu_A f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH} / (S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH} / (S_S - c)} - b_A \right) X_A, \quad (4)$$

# Динамика концентраций в субкомпартементе



$$\dot{S}_g = \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_s} - 1 \right)}} X_H, \quad (5)$$

$$\dot{X}_H = \beta \frac{V_{cv}}{V_{il}} X_H. \quad (6)$$

$c$  – концентрация  $S_s$  в конце  $C_5$

$V_{cv}$  – расход сточной воды

$V_{il}$  – расход активного ила

$\beta$  – скорость роста гетеротрофов

## Параметрическая идентификация

$P^0 = (P_1^0, \dots, P_{n_p}^0)$ ,  $n_p$  – количество параметров.

Критерий оптимальности:

$J = \sum_{i=1}^{n_y} sc_i^2 (y_i - y_i^m)^T (y_i - y_i^m)$ ,  $sc_i$  – весовой коэффициент,  
 $y_i$  – экспериментальные данные,  
 $y_i^m$  – модельные данные,  
 $n_y$  – количество измеряемых концентраций.

# Исследование чувствительности модели

$$s_{ij} = sc_i \frac{y_i^m(P^0 + \delta P_j) - y_i^m(P^0)}{\delta p_j}$$

- функции чувствительности

$$\delta_j^{msqr} = \sqrt{\frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^n s_{ij}^2}$$

- мера чувствительности<sup>1</sup>

Таблица мер чувствительности

Параметр	$C_1$	$C_2$	$c_{32}$	$C_4$	$C_5$
$Y_H$	0.49	0.25	-	-	-
$Y_A$	3.06	3.72	0.97	2.03	0.01
$\mu_H$	52.53	38.67	-	-	-
$\mu_A$	936.02	1888.1	782.85	20452.00	2341.40
$b_H$	9.59	23.39	-	-	-
$b_A$	4.80	21.90	2.78	2.93	0.80
$K_S$	0.00	0.00	-	-	-
$K_{NH}$	0.11	0.25	0.06	0.05	0.00
$K_{O,H}$	0.06	0.05	-	-	-
$K_{O,A}$	0.08	0.26	0.06	0.03	0.00
$K_\alpha$	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
$\beta$	-	-	15.67	26.98	10.781

<sup>1</sup> Brun R. et al. Practical identifiability of ASM2d parameters—systematic selection and tuning of parameter subsets. 2002.



# Исследование чувствительности модели

$$S = \{s_{ij}\} \begin{matrix} i = 1, \dots, n_y \\ j = 1, \dots, n_p \end{matrix}$$

- Матрица чувствительности

$$\gamma_k = \frac{1}{\min_{\|\beta\|=1} \|\tilde{S}_k \beta\|} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}}$$

- Индекс коллинеарности

$$\tilde{S} = \{s_{ij}\} \text{ - нормированная матрица, } \tilde{s}_{ij} = \frac{s_{ij}}{\|s_{ij}\|}$$

$\tilde{S}_k^T$  - подматрица  $\tilde{S}$  содержащая колонки, соответствующие подмножеству параметров

$\tilde{\lambda}_k$  - наименьшее собственное число матрицы  $\tilde{S}_k^T \tilde{S}_k$

$$\rho_k = \det(S_k^T S_k)^{1/2k} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_j \right)^{1/2k}$$

- Мера детерминанта

Компартмент	Параметры	$\gamma_k$	$\rho_k$
$C_1$	$\mu_A, b_H$	1.11	132.74
$C_2$	$\mu_A, b_H$	1.08	295.59
$c_{32}$	$\mu_A, \beta$	1.00	156.63
$C_4$	$\mu_A, \beta$	1.00	1050.50
$C_5$	$\mu_A, \beta$	1.00	224.69

# Параметрическая идентификация

$$(S^T S)|_{P^0} \Delta P = S^T e_i|_{P^0}^1, \quad \Delta P = P - P^0, \quad e_i = y_i - y_i^m.$$

Параметр	единицы измерения	$C_1$	$C_2$	$c_{32}$	$C_4$	$C_5$
$Y_H$	г биомассы · (г БПК <sub>полн</sub> ) <sup>-1</sup>	0.75	0.75	-	-	-
$Y_A$	г биомассы · (г аммония азота) <sup>-1</sup>	0.17	0.28	0.28	0.07	0.28
$\mu_H$	сут <sup>-1</sup>	10.00	7.00	-	-	-
$\mu_A$	сут <sup>-1</sup>	0.80	0.80	0.66	0.01	0.001
$b_H$	сут <sup>-1</sup>	0.05	0.05	-	-	-
$b_A$	сут <sup>-1</sup>	0.05	0.05	0.05	0.09	0.06
$K_S$	г БПК <sub>полн</sub> · м <sup>-3</sup>	200.00	40.00	-	-	-
$K_{NH}$	г аммония азота · м <sup>-3</sup>	1.00	0.70	1.00	0.30	1.00
$K_{O,H}$	г O <sub>2</sub> · м <sup>-3</sup>	0.20	0.01	-	-	-
$K_{O,A}$	г O <sub>2</sub> · м <sup>-3</sup>	0.40	0.40	1.50	0.40	1.50
$K_\alpha$	г аммония азота · (г БПК <sub>полн</sub> ) <sup>-1</sup>	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
$\beta$	сут <sup>-1</sup>	-	-	20,306	4,562	-24,520

<sup>1</sup> Chai Q. Modeling, Estimation, and Control of Biological Wastewater Treatment Plants. Doctoral Theses at NTNU 2008:108 at HiT, Porsgrunn. Telemark University College, 2008.

	$S_{NH}$ (г аммония азота·м <sup>-3</sup> )		
$C_i$	Экп. данные	МНК	Уточнение
$C_1$	2.750	2.748	2.749
$C_2$	3.50	3.501	3.500
$C_3$	2.750	3.192	2.722
$C_4$	2.250	2.444	2.249
$C_5$	2.250	2.249	2.249

	$X$ (г биомассы·м <sup>-3</sup> )		
$C_i$	Экп. данные	МНК	Уточнение
$C_1$	3300.000	3273.000	3273.000
$C_2$	2635.000	2631.500	2631.500
$C_3$	3430.000	3072.4	3081.100
$C_4$	3720.000	3843.600	3839.000
$C_5$	2760.000	2736.500	2744.800

# Введение управления

$$\dot{S}_O = Q(S_O^{in} - S_O) + u - \omega - \frac{1 - Y_H}{Y_H} \mu_H f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{\frac{10^4(c+\delta)}{S_S} - 1}} X_H - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \mu_A f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH} / (S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH} / (S_S - c)} X_A, \quad (7)$$

$$\dot{S}_O = Q(S_O^{in} - S_O) + u - \omega - \beta \beta_Y \frac{V_{ov}}{V_{il}} X_H - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \mu_A f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH} / (S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH} / (S_S - c)} X_A. \quad (8)$$

$u$  - расход подаваемого кислорода,

$\omega$  - объёмная скорость выхода кислорода в атмосферу,

$\beta_Y$  - коэффициент, характеризующий количество необходимого кислорода для окисления гетеротрофами веществ, не являющихся  $S_S$ .

# Выводы

- Предложена математическая модель процессов нитрификации и окисления легко биоразложимой органики.
- С помощью методов теории чувствительности найдены характеристики идентифицируемости модели, определено подмножество идентифицируемых наиболее точно параметров и уточнены значения параметров в каждом компартменте.
- Предложено введение управления динамикой концентрации кислорода с целью минимизации затрат на подачу кислорода при поддержании выходных концентраций субстратов в допустимых пределах.

**Спасибо за внимание!**