

Тема доклада

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПОПУЛЯЦИЮ ФИТОГЕЛЬМИНТОВ В АГРОБИОЦЕНОЗЕ

Перевертин Кирилл Александрович

Центр паразитологии Института проблем экологии и
эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва, Россия

Аннотация

Система управления популяцией паразитических нематод на сельхозкультурах путём дозированного использования средств борьбы (химпрепараты, биоагенты) базируется на 2-х зависимостях типа «доза-эффект» - экспонентой (хорошо известной моделью вредоносности) и предлагаемой гиперболической поверхностью затрат на управление. Хотя $1/x \neq e^{-x}$, при наличии соответствующих параметров гипербола и экспонента пересекаются не более чем в двух точках. Их положительная разность – кривая, имеющая единственный максимум. Аналитическое решение для этой критической точки соответствует оптимальному управляющему воздействию по критерию максимизации условно-чистого дохода.

$$\frac{1}{x} \neq e^{-x}$$



ЗРИ
В
КОРЕНЬ!

$$\sigma = \sqrt{a \times \overline{X}^b}$$

Постановка задачи

Коммерциализация современного землепользования предполагает востребованность новых экономико-математических методов управления агробиоценозами, в частности, в области защиты растений, особенно в условиях дефицита ресурсов.

В общем виде постановка задачи выглядит достаточно просто: имеется посевная площадь, заражённая фитонематодами. Борьба с ними возможна внесением препарата (химического либо биоагента). Требуется оптимально использовать препарат по критерию наивысшей рентабельности или окупаемости затрат ($\max$ руб. дохода/ руб. затрат).

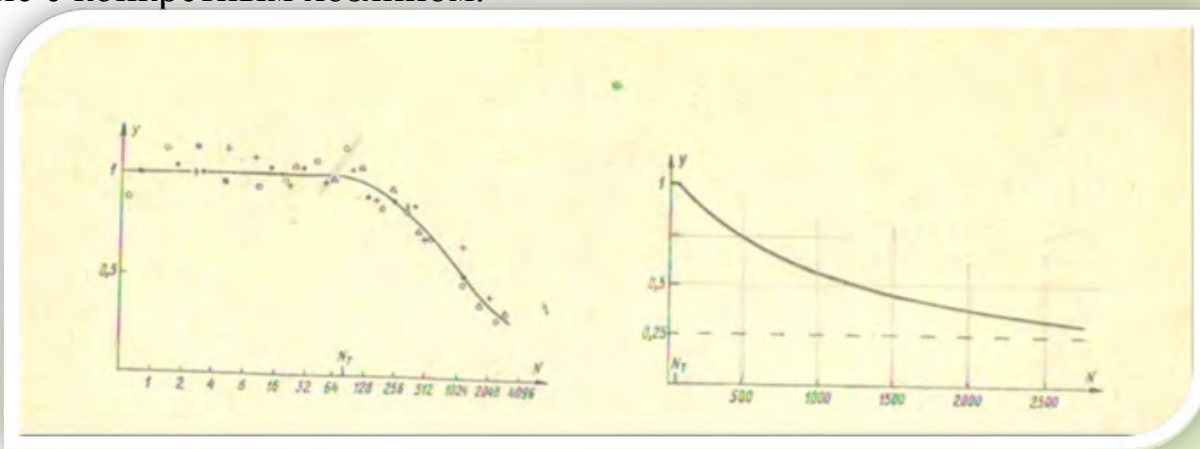
Латентная
фаза



Зависимость (потерь) урожая сельхозкультур (Y) от допосевной плотности популяции фитопаразитических нематод (P) описывается классической моделью Seinhorst (1965), известной за рубежом, как модель критической точки (critical point model),

$$Y = m + (1 - m)Z^{(P-T)} \quad \text{для } P > T, \text{ а для } P \leq T, Y=1 \quad (1)$$

Где Y -выход урожая; P – входная переменная – плотность популяции нематод (особей/100 мл почвы). В этих же единицах выражается параметр T – порог толерантности – плотность ниже которой потерь урожая не происходит; m – минимальный урожай, постоянный при сколь угодно высоких плотностях нематод; Z – параметр меньше 1, имеющий биологический смысл агрессивности паразита в системе с конкретным хозяином.



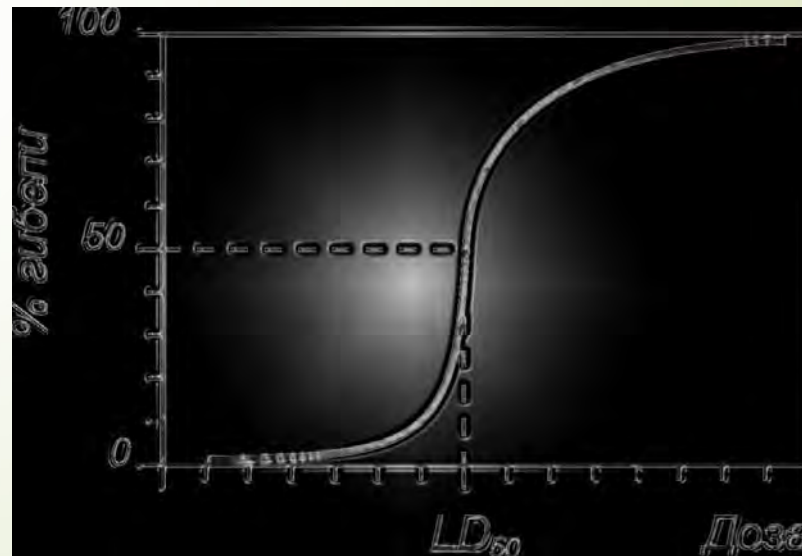


Расположение ладов
на грифе гитары
соответствует
логарифмике

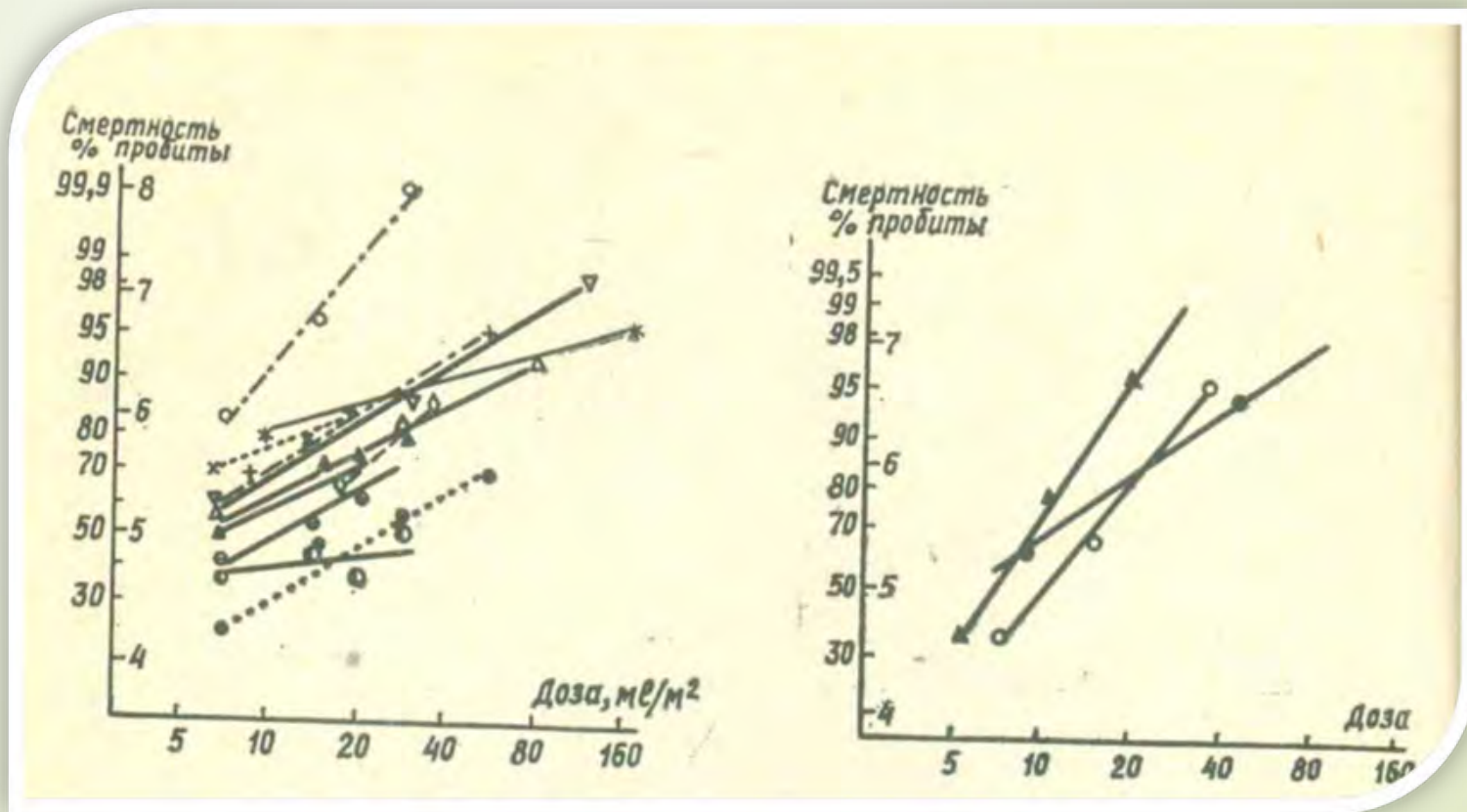


Хуже дело обстоит со второй кривой – функцией затрат на борьбу. Подавляющее большинство прикладных рекомендаций, характеризуя «биологическую эффективность», либо напрямую связывают дозировку препарата с выходом урожая (минус редуцию популяции паразитов), либо описывают это снижение, как постоянную, вне зависимости от значения исходной плотности популяции. На более высоком уровне стоит функция «доза-эффект», представляющая S-образную кривую, задаваемую не аналитически, а, например, таблицей вероятностных единиц (пробит-юнит). Самым главным её достоинством является доза LD_{50} – аргумент, предусматривающий 50%-ю смертность паразитов – соответствующая точке перегиба (центру) S-образной кривой.

Таблица для преобразования значений биологической эффективности нематицида из процентов в пробит-единицы										
К %	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3,72	2,67	2,95	3,12	3,25	3,36	3,45	3,52	3,59	3,66
10	4,16	3,77	3,82	3,87	3,92	3,96	4,01	4,05	4,08	4,12
20	4,48	4,19	4,23	4,26	4,29	4,33	4,36	4,39	4,42	4,45
30	4,75	4,50	4,53	4,56	4,54	4,61	4,64	4,67	4,69	4,72
40	5,00	4,77	4,80	4,82	4,85	4,87	4,90	4,92	4,95	4,97
50	5,25	5,03	5,05	5,08	5,10	5,13	5,15	5,18	5,20	5,23
60	5,52	5,28	5,31	5,33	5,36	5,39	5,41	5,44	5,47	5,50
70	5,84	5,55	5,58	5,61	5,64	5,67	5,71	5,74	5,77	5,81
80	6,28	5,88	5,92	5,95	5,99	6,04	6,08	6,13	6,18	6,23
90		6,34	6,41	6,48	6,55	6,64	6,75	6,88	7,05	7,33



Линейные значимые участки в традиционной системе «доза-эффект» для препарата ДД и свекловичной нематоды (по Seinhorst , 1973, Перевертин, 1987, 1998).



Альтернативой нами предлагается гиперболический вид функции затрат на борьбу $Z(P)$. Точка перегиба гиперболы сохраняет свой смысл LD₅₀, «наследуя» его от соответствующей точки S-образной кривой «доза-эффект». К тому же LD₅₀ – один из очень немногих достоверно определяемых показателей для многочисленных хозяйинно-паразитных систем в различных агробиоценозах. Зная «главную точку» гиперболы и асимптоты, функцию затрат $Z(P)$ (для конкретной P_0) можно вполне считать определённой.



Вообще говоря о «дозе-эффекте», S-образность – это, зачастую, дань вербальным человеческим представлениям о характере функции. Та же отрицательная экспонента Сейнхорста именно S-образна в полулогарифмических координатах и полностью удовлетворяет представлениям о функции «доза-эффект» от токсикологии до, например, акустики:

1. наличие зоны отсутствия эффекта (возможен и контринтуитивный обратный эффект) на малых дозах $[0;T]$;
2. зависимость эффекта от логарифма дозы близка к линейной в среднем диапазоне нагрузок $(LD_{50} \pm L)$;
3. влияние высоких доз нивелируется – эффект индифферентно приближается к некой горизонтальной асимптоте (m).

Вербально свойства зависимости $Y(P)$ можно определить следующим образом:

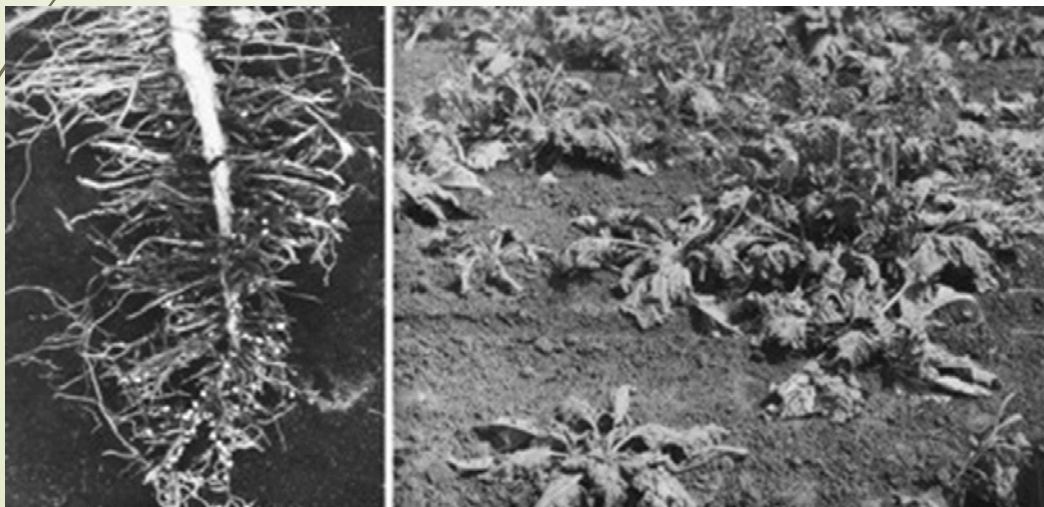
При минимальных инвазионных нагрузках $[0;P_t]$ потерь урожая не происходит.

В области средних инвазионных нагрузок зависимость Y от $\log P$ близка к линейной.

На высоких нагрузках выход урожая стабилизируется на каком-то значении m (параметр имеет смысл минимального урожая).

Заметим, что частный случай $m=0$, т.е. полная гибель урожая для производственного масштаба – поля практически исключен, хотя гибель на организменном уровне и в очагах явление частое.

Целевая функция оптимизации, разумеется, может быть различной. Существовала, например, такая страна – ГДР, где самообеспечение сахаром возводилось в ранг госполитики. Очень смелое решение для агробиоценоза (свекловичных полей) ещё в 19 веке «порадовавшем» паразитогенным кризисом – массовым банкротством и закрытием сахзаводов по причине «свеклоутомления». Причиной была свекловичная цистообразующая нематода до сих пор широко представленная (несмотря на более чем 100-летнюю борьбу) в нематофауне Германии.



Кстати, невозможность полной ликвидации (девастации) рассматриваемого паразита хорошо вписывается в предлагаемую нами гиперболическую кривую затрат на борьбу. Снижение потерь до неощутимого уровня ($P_i \leq T$) возможно, хотя чрезвычайно затратно, но нулевой аргумент асимптотически недостижим. Поэтому, в нашем случае, в качестве целевой функции логично заявлена не максимизация выхода урожая, а оптимальная рентабельность использования препарата (достаточно редкая ситуация, когда экономические приоритеты относительно совпадают с экологическими).

Деньги и нематоды

Корректно совместить рассматриваемые отрицательную экспоненту и гиперболу очень легко – достаточно умножить выход урожая Y на закупочную цену урожайной продукции C_y (строго говоря, на прогноз этой цены в конце вегетационного периода). Итак, по оси ординат имеем «Деньги», по оси абсцисс – плотность популяции нематод - P . При этом (исключительно для наглядности) последняя шкалируется в логарифмах. Сейнхорстова экспонента становится S-образной, а гипербола лишь теряет симметричность ветвей (рисунок 1)

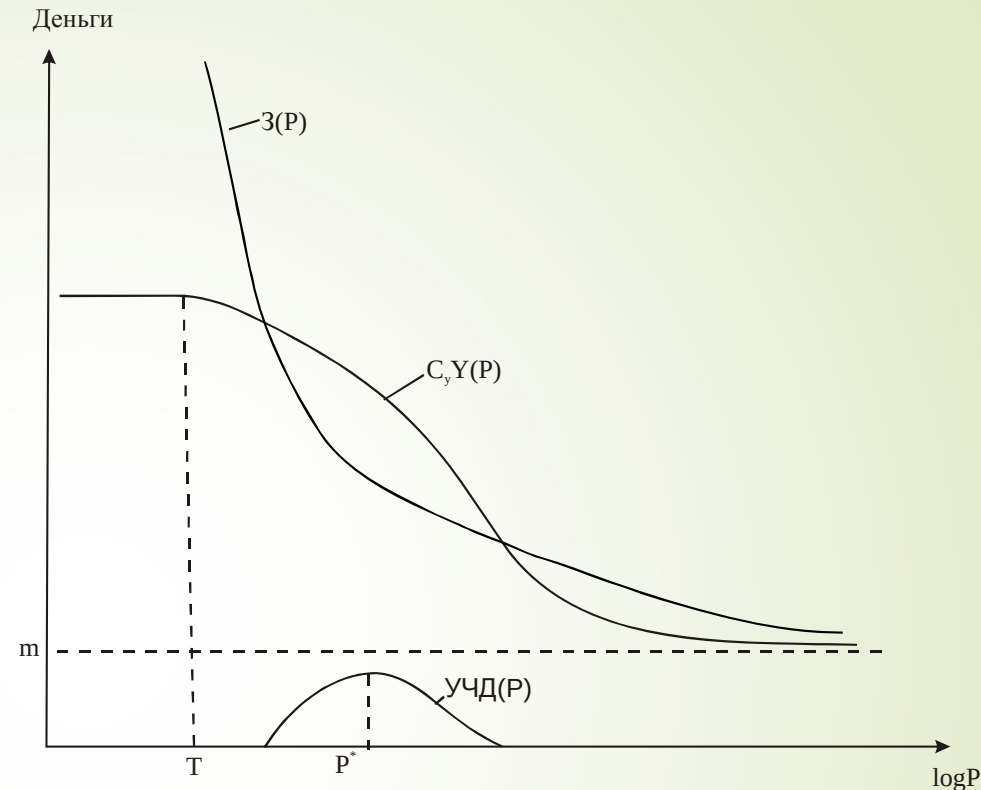
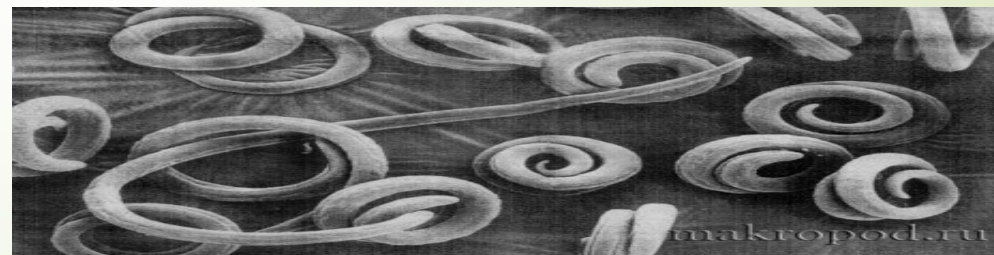


Рисунок 1. Определение оптимального аргумента в двух системах “доза-эффект”



Средний (линейный) участок $K = A + B \ln D$;

Снижение плотности популяции нематод $100 \frac{P_0 - P'}{P_0} = A + B \ln D$;

Немного
арифметики

$$P' = 1 - \frac{P_0(B \ln D) + A}{100};$$

Доза нематцида для снижения с P_0 до P' $D = e^{(100(1-P'/P_0)-A)/B}$;

Q – затраты на препарат

$$\alpha = C_n e^{\frac{(100-Q)}{B}}$$

$$\beta = \frac{1}{P_0 B}$$

$$Q = \alpha e^{-P' \beta} + Q';$$

при логарифмическом выражении аргумента $Q = \alpha e^{-\ln P' \beta} + Q'$; т.е. график имеет вид гиперболы.

$$\frac{d(C_y Y(P))}{dP} = C_y a b e^{bP};$$

$$\frac{dQ(P)}{dP} = \frac{100 C_n e^{\frac{(100-A)}{B}}}{P_0 b} e^{\left(-\frac{100P}{P_0 B}\right)};$$

Окончательно для оптимального P^* имеем:
$$P^* = \ln \left(-\frac{100 C_n e^{((100-A)/B)}}{C_y a b P_0 B} \right) / \left(b + \frac{100}{P_0 B} \right)$$

Две точки пересечения кривых – это два корня решения уравнения 2.

Решение
задачи

$$3(P, P_0) = C_y Y(P) \quad (2)$$

Именно в диапазоне между этими точками существует последняя интересующая нас кривая – разность между затратами и доходом – условно чистый доход УЧД(P) (уравнение 3). Понятно, что

$$УЧД(P) = C_y Y(P) - 3(P, P_0) \quad (3)$$

Эта несимметричная кривая обладает несомненным достоинством — единственным максимумом, который и является целью наших скромных поисков. Определить его также несложно – УЧД(P)* - корень уравнения 4.

$$(C_y Y(P) - 3(P, P_0))' = 0 \quad (4)$$

УРА!

Задача решена.

Пример. Рассчитанная в результате применения данного подхода доза ДД (дихлорпропен-дихлорпропан, правда, в настоящее время не применяется) против свекловичной цистообразующей нематоды при $P_0 = 5000$ нематод/100 мл почвы составила 410 л/га против универсальной рекомендации 800 л/га.

Спасибо за внимание!

*Нематода, она и в Африке
нематода...*

